



paolo carlizza (paolo.carlizza)

LA POPOLAZIONE CRESCE O NO? L'EQUAZIONE LOGISTICA

1 August 2017

In questo articolo descriviamo un aspetto statistico, la funzione logistica o le sue equazioni, che risultano molto utili per la gestione delle risorse di una popolazione generalizzata di entità, che si evolvono in una certa maniera nel tempo, che può essere libera o condizionata da determinati fattori.

La funzione logistica può essere utilizzata per illustrare il progresso della diffusione di un'innovazione tecnica, lungo il suo ciclo di vita. Storicamente, quando vengono introdotti nuovi prodotti si investe molto in ricerca e sviluppo; ciò conduce a notevoli miglioramenti qualitativi e riduce i costi. Tutto questo comporta un periodo di crescita rapida dell'industria. Ecco alcuni beni e servizi coinvolti in tal fenomeno: ferrovie, lampade a incandescenza, elettrificazione, Ford Model T, trasporto aereo e computer. Infine, i drastici aumenti d'efficienza, nonché le associate opportunità di riduzione dei costi, si esauriscono; al contempo, il prodotto o processo in questione si diffonde saturando il mercato, restando pochi potenziali nuovi acquirenti.

La funzione logistica è stata usata negli articoli di diversi ricercatori dell'IIASA (International Institute of Applied Systems Analysis). In tali pubblicazioni vengono studiati argomenti come: la diffusione di varie innovazioni e infrastrutture; la sostituzione di fonti di energia; il ruolo del lavoro fisico in economia, ovvero nei cicli produttivi di lungo periodo. Robert Ayres (1989)[1] e Cesare Marchetti (1988, 1996)[2][3] si sono occupati delle cosiddette Onde di Kondratiev, cicli produttivi macroeconomici sinusoidali, e della diffusione delle innovazioni. Un libro di Arnulf Grübler (1990) fornisce un resoconto dettagliato della diffusione di infrastrutture — tra cui canali, ferrovie, autostrade e compagnie aeree — dimostrando che essa è ben rappresentata da una opportuna curva logistica[4].

Carlota Perez (2002)[5] ha scelto la curva logistica per spiegare e sviluppare le succitate Onde K, introducendo alcuni termini chiave: irruzione, per l'inizio di un'era tecnologica; frenesia, per indicare la sua diffusione iniziale; sinergia, ossia il suo rapido sviluppo; maturità, per denotarne la diffusione completa.

Malgrado la sua popolarità persistente come modello per la crescita della popolazione nel campo della dinamica di popolazione, quest'uso della funzione logistica è stato pesantemente criticato. Un critico, il demografo e professore Joel E. Cohen (How Many People Can The Earth Support, 1995) spiega che Verhulst ha tentato di adattare una curva logistica, basata sulle ipotesi di funzione logistica, a tre censimenti separati della popolazione degli Stati Uniti d'America per predire la crescita futura in questo Paese. Tutte e tre le serie di predizioni hanno fallito.

Nel 1924, i professori Ray Pearl e Lowell J. Reed hanno usato il modello di Verhulst per predire un

limite superiore di 2 miliardi per la popolazione mondiale. Questo limite è stato superato nel 1930. Nel 1936 un nuovo tentativo di Pearl e di un suo associato, Sophia Gould, ha prodotto un limite superiore di 2,6 miliardi. Questo limite è stato superato nel 1955. Un'analisi di queste critiche è stata effettuata dal professor Peter Turchin (la Dinamica di Popolazione Complicata, 2003) che, nonostante tutto, conclude che questo tipo di equazioni fornisce una struttura utile per la dinamica di una sola specie (anche grazie a modelli generalizzati[6]) e può contribuire all'elaborazione di modelli per le interazioni di più specie. Nonostante le critiche, storicamente la curva logistica è stata un punto di unione tra modelli matematici e sociologici, come ad esempio la teoria della trasformazione di George Land, che usa il concetto della curve a S per predire un corretto modello affaristico-industriale nei vari scenari di un processo di crescita tecnologica.

Introduzione: cos'è un'equazione logistica

Una funzione o curva logistica è generalmente un grafico ad S, che descrive la crescita di popolazioni: all'inizio ha un andamento di crescita esponenziale, che diventa a poco a poco lineare ed infine assume un andamento asintotico orizzontale, dove la crescita è terminata (vedi Fig. 1).

La libera evoluzione di crescita (senza fattori interferenti) in genere è modellata mediante un fattore $+rKP$, che rappresenta una percentuale positiva; però, quando la popolazione cresce, alcuni membri di essa, si mettono in competizione per le risorse e questa situazione limita il tasso di crescita, finché la popolazione cessa di aumentare (periodo di maturità).

Una funzione logistica, in generale, è descritta dalla seguente funzione

$$P(t) = a \frac{1 + me^{-t/\tau}}{1 + ne^{-t/\tau}}$$

Questo modello logistico-matematico descrive, per esempio, la crescita di un feto nell'utero materno; dapprima si sviluppa linearmente senza impedimenti, poi il volume limitato dell'utero ne diminuisce il tasso di crescita, che sempre è positivo, fino a che nei giorni vicini al parto la crescita si stabilizza asintoticamente ad un valore costante.

Dopo il parto il bambino ritornerà a crescere.

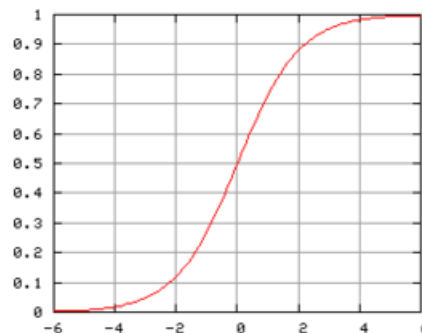


Fig. 1. Curva logistica.

Il modello di Malthus

Ma il primo modello ad essere stato introdotto, per descrivere la crescita delle popolazioni è stato il modello di Malthus, che si ricela molto semplice ed ha una caratteristica di tipo esponenziale. Esso si applica alla crescita di una popolazione isolata e dotata di risorse infinite e la variazione degli individui dipende solamente dal numero di nascite e morti nell'unità di tempo.

Se $x(t)$ è il numero d'individui e r il tasso di crescita per individuo l'equazione che studia il processo di crescita risulta essere:

$$x_{n+1} = x_n(1 + r)$$

Invece se la popolazione è molto numerosa ed i tempi di osservazione molto lunghi può valere quest'altra equazione:

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)$$

Nel caso discreto l'equazione diventa una progressione geometrica a ragione $1+r$, ossia

$$x_{n+1} = (1 + r)^{n+1}$$

Nel caso continuo, la soluzione dell'equazione differenziale è

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

Se $r=0$ la popolazione diventa costante, se $r<0$ la popolazione decresce, mentre se $r>0$ la popolazione 'esplode'; ma anche quest'ultimo caso può essere realistico in tempi brevi.

L'equazione di Verhulst

Questa equazione fu pubblicata dall'autore nel 1838, dopo aver letto il libro di Thomas Malthus, *An Essay of the principle of Population*.

Verhulst verificò la sua equazione per descrivere le autolimitazioni di crescita di una popolazione biologica, ma poi fu ribattezzata come equazione di Verhulst-Pearl dopo una riscoperta di Alfred Loika nel 1925, denominandola legge di crescita di una popolazione.

In genere, si parte dall'equazione di Verhulst, che è uno dei primi modelli matematici che sono stati creati. Questo modello assume che:

1. il tasso di riproduzione è proporzionale alla popolazione esistente
2. Il tasso di riproduzione è proporzionale all'ammontare delle risorse disponibili.

In questo modo, il secondo termine modella la competizione delle risorse disponibili, che tende a limitare la crescita della popolazione.

Prendendo P , come misura della popolazione e t il tempo, il modello è rappresentato dall'equazione differenziale

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right),$$

dove r è il tasso di crescita e K il termine asintotico della popolazione (definito dalle risorse disponibili della popolazione stessa).

Il termine $\frac{P}{K}$ è detto competizione intaspecifica.

La soluzione generale di questa equazione differenziale è una funzione di tipo logistico.

La soluzione dell'equazione dove P_0 è la popolazione iniziale è:

$$P(t) = \frac{K P_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

Raccogliendo e semplificando il termine $P_0 e^{rt}$

$$P(t) = \frac{K}{1 + q e^{-rt}}$$

dove si è posto

$$q = \frac{K - P_0}{P_0}$$

per cui è ricavabile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$$

Funzione Sigmoidale

Se all'equazione logistica generalizzata poniamo $a=1$, $m=0$, $n=1$, $r=1$, si ottiene:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

Se si studia la funzione , la sua derivata prima e la seconda si ottengono gli andamenti di Fig. 2.

[Fig. 2. Funzione sigmoidale e sue derivate](#)

Fig. 2. Funzione sigmoidale e sue derivate

Proprietà della funzione sigmoide

La funzione sigmoide standard è la soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine non lineare

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P),$$

con condizione al contorno $P(0)=1/2$

La curva sigmoide mostra una prima crescita esponenziale per t negativo, che rallenta in una crescita lineare di pendenza pari a $1/4$, nell'intorno di $t=0$, poi si avvicina ad $y=1$, con un decadimento esponenziale.

La funzione logistica è l'inverso della funzione *logit* e può essere usata per convertire il logaritmo di una probabilità in una probabilità: la conversione del rapporto *rapporto di log-probabilità* di due alternative porta anche la forma di curva sigmoideale.

Modello di crescita

Se un numero di individui può essere rappresentato in una funzione continua nel tempo $N(t)$, che ammette derivata continua, si può pensare che l'incremento della popolazione sia rappresentabile dalla sua derivata nel tempo, in un modello elementare, che è direttamente proporzionale al numero degli individui della popolazione stessa, ovvero:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t),$$

con r parametro di crescita detto malthusiano (tasso massimo di crescita)

Pertanto se r è una costante, la popolazione cresce in maniera esponenziale con pendenza legata ad r stesso. Invece se abbiamo un ambiente, in cui le risorse sono limitate si può descrivere la crescita della popolazione, mediante un coefficiente r che decresce all'aumentare della popolazione stessa; ed il modello più semplice si traduce nel porre $r(t)=a-bN(t)$ con a e b costanti.

Sostituendo nella appena precedente equazione differenziale, si ottiene:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN(t)^2,$$

che può tradursi nella forma

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

con $K = \frac{a}{b}$, che rappresenta la popolazione massima sostenibile. Questa è l'equazione logistica di Verhulst.

Separando le variabili per integrare

$$\frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN} \right) dN(t) = \int dt$$

e ponendo come condizione al contorno

$$N(t_0) = N_0$$

si ottiene la seguente soluzione

$$N(t) = \frac{K N_0 e^{rt}}{K - N_0 \cdot (1 - e^{rt})} = \frac{k N_0}{N_0 + (k - N_0) \cdot e^{-rt}}$$

E' immediato verificare che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 0$$

Si avrebbe un altro comportamento per $N_0 > K$, perché il secondo limite tenderebbe a $-\infty$, con presenza anche di un asintoto verticale, ma quest'aspetto del problema rappresenta una popolazione in rapida decrescita in eccesso rispetto alle risorse presenti. Nelle Fig. 3 e 4 vediamo rappresentati

- il confronto tra la crescita esponenziale (Malthus) e quella logistica
- i risultati dell'equazione differenziale logistica

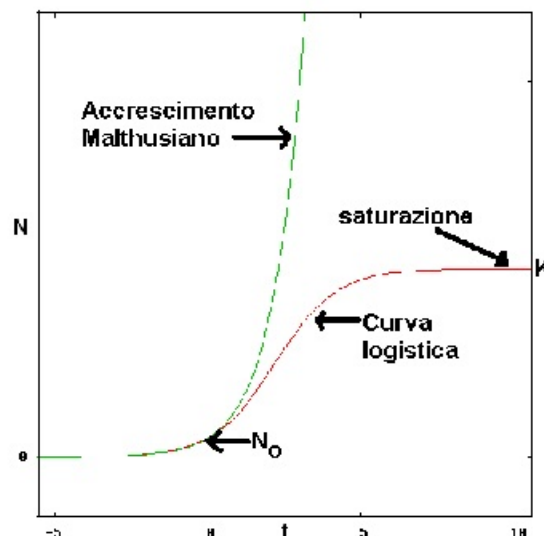


Fig. 3. Confronto tra crescita esponenziale e logistica.

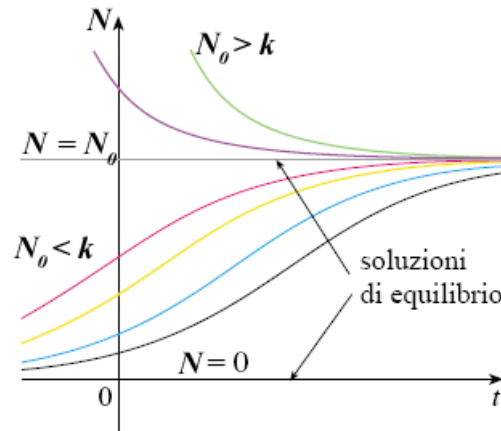


Fig. 4. Curve soluzioni dell'equazione differenziale logistica.

Altri modelli di crescita meno semplificati

Se si suppone che durante la crescita di una popolazione, accadono delle catastrofi, occorre tenerne conto nel computo totale dell'equazione precedente, inserendo un termine di prelievo, (come se in un lago pieno di pesci, ne prelevassimo una certa quantità). Detta p la quantità di questo prelievo si può scrivere una nuova forma di equazione di Verlhust:

$$\frac{dN}{dt} = aN(t) - bN(t)^2 - p$$

Questa equazione è difficile calcolarla, ma se consideriamo l'annullamento della derivata prima $N(t)$, si ottiene:

$$s_1 = \frac{a}{2b} + \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{p}{b}}$$

$$s_2 = \frac{a}{2b} - \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{p}{b}}$$

$$\text{con } a^2 - 4pb \geq 0$$

$$\text{da cui } p^2 \leq \frac{a^2}{4b}.$$

Ponendo $N'(t) = Y(N(t))$ e Ω l'insieme di funzioni $N(t)$, che al variare di N_0 soddisfa l'equazione Verlhust a prelievo costante, si ha che:

per $s_2 \leq N(t) \leq s_1$ Y è positiva e le funzioni di Ω sono monotone crescenti e $Y(s_1) = 0$ e quindi esse tendono asintoticamente ad s_1 .

per $N(t) > s_1$ Y è negativa e le funzioni di Ω sono monotone decrescenti quindi esse tendono asintoticamente ad s_1 .

per $0 \leq N(t) \leq s_1$ Y è negativa e le funzioni di ω sono monotone crescenti e $Y(s_1) = 0$ e si estinguono dopo un tempo t^* (i valori della popolazione devono essere maggiori di zero)

Per $N(t) = s_1$ e $N(t) = s_2$, $Y=0$ e le funzioni di Ω sono costanti.

In caso di prelevamento, la popolazione iniziale non deve essere inoltre minore di s_2

Nel caso in cui la popolazione possa estinguersi si può modificare l'equazione in

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(1 - \frac{m}{p} \right),$$

dove m rappresenta il livello minimo al di sotto del quale la popolazione si estingue (pensiamo al lago di pesci, dove gli adulti non riescono ad accoppiarsi).

L'ultimo passo è l'aggiunta di un ritardo per cui si raggiunge una fase di maturità in un asintoto orizzontale.

L'equazione in questo caso si modifica in:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t - t_m)}{k} \right)$$

dove $N(t)$ oscilla in modo decrementale infinito attorno ad un punto di equilibrio.

Riferimenti bibliografici.

1. Mimmo Iannelli - INTRODUZIONE ALLA TEORIA MATEMATICA DELLE POPOLAZIONI - Appunti del corso di Biomatematica - Corso di laurea in Matematica - a.a. 2008-2009 - Dipartimento di Matematica - Universita' di Trento
 2. Robert U. Ayres, Technological Transformations and Long Waves , in International Institute for Applied Systems Analysis, febbraio 1989. Cesare Marchetti, Kondratiev Revisited — After One Kondratiev Cycle, in International Institute for Applied Systems Analysis, marzo 1988.
 3. Cesare Marchetti, Pervasive Long Waves: Is Human Society Cyclothetic, in International Institute for Applied Systems Analysis, settembre 1996.
 4. Arnulf Grübler, The Rise and Fall of Infrastructures: Dynamics of Evolution and Technological Change in Transport, Heidelberg, Physica-Verlag, 1990, p. 305.
- Carlota Perez, Technological Revolutions and Financial Capital: The Dynamics of Bubbles and Golden Ages, Edward Elgar Publishing, 2002, p. 198.

5.A. Urso, Generalizzazione dell'equazione logistica, www.matematicamente.it.

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:la-popolazione-cresce-o-no-l-equazione-logistica>"