



paolo carlizza (paolo.carlizza)

LEGGE FISICA DEL RAFFREDDAMENTO DEI CORPI.

16 January 2013

Con questo articolo si puo' calcolare il decadimento della temperatura nel tempo t , quando un corpo ad una certa temperatura iniziale, si raffredda in un ambiente a temperatura minore. Questa teoria e' applicabile a tutti quei dispositivi che si riscaldano e che per un certo tempo non possono essere toccati e le applicazioni vanno anche fino ai circuiti elettronici di potenza.

Si sa che la distribuzione delle temperature nella trasmissione per conduzione del calore, sia in regime stazionario e non, viene regolata dalla equazione di Fourier a tre dimensioni data da:

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

con T temperatura assoluta, k conducibilita' ed $\alpha = \frac{k}{\rho c}$,

con ρ densita' e c calore specifico a pressione costante del mezzo. α e' detta diffusivita'. Il termine q_v e' relativo alla potenza di calore assorbita o persa dal sistema (temine di sorgente o pozzo).

Inoltre vale anche in maniera piu' semplificata la relazione di Fourier nella trasmissione di calore unidimensionale, che e' data, per unita' di superficie trasversale alla propagazione del calore, da:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \frac{dT}{dx}$$

con k conducibilita' termica.

Ma nell'aria e nel vuoto abbiamo anche due modalita' di trasmissione del calore: convezione ed irraggiamento. Infatti il calore si trasmette sia per i moti delle particelle dell'aria a temperature diverse, sia perche' in corpo caldo puo' assimilarsi per la legge di Stephen-Boltzmann ad una sorgente elettromagnetica. La somma di queste due ultime modalita' di trasmissione del calore e' detta adduzione.

Andiamo a esaminare il caso di raffreddamento di un corpo. Se ipotizziamo una lastra metallica quadrata di lato l e spessore d ad una certa temperatura T , si può arrivare a determinare la legge di raffreddamento nel tempo, considerando congiuntamente i fenomeni di conduzione attraverso la sezione della lastra, la convezione vicino alla lastra e l'irraggiamento provocato dalla temperatura della lastra stessa. Esaminiamo il caso di convezione. Infatti s'ipotizza che vi sia a contatto della superficie della piastra uno strato laminare di aria dove il calore si trasmette per convezione, la cui profondità è nell'ordine dei millimetri. La quantità di calore per unità di tempo che viene scambiata per convezione è data da:

$$\frac{dQ}{dT} = h_c S (T_c - T_a)$$

con h_c costante di convezione e T_c e T_a temperature del corpo lastra e del mezzo al di là della lastra, ovvero l'aria.

D'altro canto, nella lastra la quantità elementare di calore che fluisce tra due sezioni vicine distanti dT in temperatura è data da:

$$dQ = \rho c dT$$

sulla superficie vale la condizione limite che le quantità trasmesse per conduzione e per convezione debbano essere uguali per cui si arriva all'equazione differenziale seguente in $T(t)$

$$-\rho c \frac{dT}{dt} = h_c S (T_c - T_a)$$

Considerando l'irraggiamento, l'equazione di trasmissione del calore è della stessa forma di quella di convezione per cui, applicando anche per questo caso la condizione al contorno sulla superficie della lastra, uguagliando flusso di calore per conduzione e per irraggiamento si giunge all'equazione differenziale:

$$-\rho c \frac{dT}{dt} = h_i S (T_c - T_a)$$

con h_i costante d'irraggiamento.

Sommando i due casi di convezione ed irraggiamento, l'equazione differenziale diventa:

$$-\rho c \frac{dT}{dt} = (h_c + h_i) S (T_c - T_a)$$

Manipolando ancora un po', si ottiene:

$$\frac{d(T_c - T_a)}{dt} + \frac{h_a S}{\rho c} (T_c - T_a) = 0$$

con $h_a = h_c + h_i$

valendo l'ipotesi tacitamente ammessa, di linearizzazione per piccole variazioni di temperatura. Il risultato dell'equazione e' la seguente funzione di temperatura nel tempo, che da' la legge di raffreddamento da una temperatura T_c ad una T_a .

$$T(t) = T_a + (T_c - T_a)e^{(-\frac{h_a S}{\rho c})t}$$

La quantita' $\tau = \frac{\rho c}{h_a S}$ e' la costante di tempo del sistema considerato, tempo in cui la temperatura scende da quella massima T_c a una inferiore di $0.366 \cdot (T_c - T_a)$

Per il calcolo dei coefficienti h_c e h_i occorre riferirsi alle teorie della trasmissione di calore per conduzione ed irraggiamento.

Nell'ambito della convezione si ha che il coefficiente h_c e' legato al numero di Nusselt, secondo la relazione:

$$Nu = \frac{h_c L_c}{k}$$

dove Nu e' il numero di Nusselt, L_c la dimensione della zona di convezione, ovvero la larghezza dello strato laminare nell'aria nel nostro caso e k la conducibilita' dell'aria.

Il numero di Nusselt e' legato all'andamento del numero Ra di Rayleigh, che e' il prodotto tra il numero di Grashoff Gr e il numero di Prandtl Pr . Si ha che

$$Gr = \frac{g\beta L_c^3 (T_c - T_a)}{\nu^2} \text{ e' il numero di Grashoff } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \text{ e' il numero di Prandtl}$$

e quindi

$$Ra = \frac{g\beta L_c^3 (T_c - T_a)}{\nu\alpha}$$

dove, riepilogando

g e' l'accelerazione della gravita'

β il coefficiente di dilatazione dei gas perfetti, pari a $\frac{1}{T}$ con T temperatura assoluta.

L_c dimensione caratteristica della convezione

ν viscosita' dinamica del fluido

α viscosita' dinamica del fluido

Se $10^4 < Ra \leq 10^9$

si ha che $Nu = 0.59Ra^{0.25}$ ovvero si e' in convezione naturale con regime laminare;

se $10^9 \leq Ra < 10^{13}$ si e' in convezione naturale turbolenta con

$$Nu = 0.13Ra^{0.33}$$

Il nostro caso sara' il primo dei due.

Per l'irraggiamento h_c deriva dalla legge della potenza di calore per unita' di superficie irradiata da un corpo grigio che vale

$$Q = \sigma_0 a (T_c^2 + T_a^2) (T_c + T_a) (T_c - T_a)$$

Confrontando con l'equazione della quantita' di calore trasmessa per irraggiamento vista precedentemente, si ricava che

$$h_i = \sigma_0 a (T_c^2 + T_a^2) (T_c + T_a)$$

In questa formula σ_0 e' il coefficiente di Stephen - Boltzmann, che vale $5,66 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$, mentre a e' il coefficiente di assorbimento del corpo irradiante, assimilato ad un corpo grigio.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:legge-fisica-del-raffreddamento-del-corpo>"