



paolo carlizza (paolo.carlizza)

CALCOLO DI TENSIONI E CORRENTI IN UN CIRCUITO ELETTRICO.

23 May 2013

Generalita'

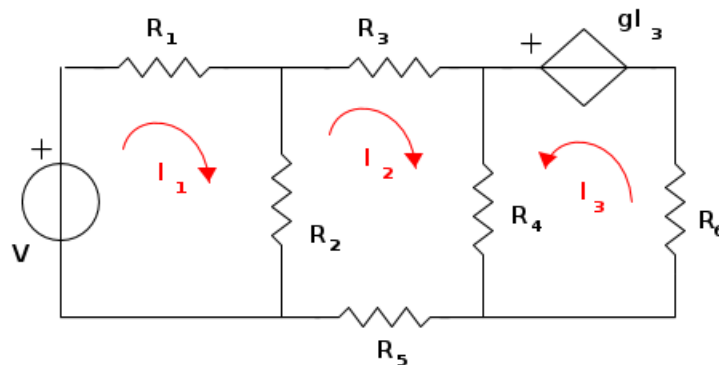
Delle volte capita di porci di fronte ad un circuito elettrico, formato da una rete di generatori e resistenze e trovare difficile la determinazione di tutti i parametri incogniti che lo caratterizzano, tipo i valori delle stesse tensioni o correnti. Niente paura, esistono dei metodi molto rapidi per impostare in pochi minuti delle relazioni, che ci portano alla risoluzione del problema, a patto di conoscere elementi basilari del calcolo delle matrici ed i vettori. Impostate le relazioni matematiche conseguenti, e' gioco fatto: un programma su PC o tools come excel, mathcad e matlab, danno la risposta immediatamente.

Come si fa.

Esistono tre metodi in elettrotecnica per determinare la configurazione numerica elettrica di un circuito elettrico: metodo delle maglie, dei nodi e dei tagli. Per il momento esaminiamo il primo.

Metodo delle maglie.

Nella figura che segue, e' realizzato un semplice circuito a tre maglie e vogliamo determinare le relazioni tra le resistenze, i due generatori di tensione (di cui uno e' controllato in corrente, che potrebbe simulare un transistor, con una corrente d'ingresso nella base ed una tensione d'uscita tra collettore ed emettitore.



Prima di tutto si stabiliscono nelle maglie le correnti di maglia, con un verso a piacere, vedi nel nostro caso I_1, I_2, I_3 ; poi si stabilisce una relazione matriciale del tipo $V = AI$, dove la matrice A e' di dimensione $n \times n$, dove n e' il numero delle maglie: (nel nostro caso $n=3$).

Il vettore I e' costituito dalle n correnti di maglia, ovvero con I_1 , abbiamo la corrente della maglia 1, I_2 della maglia 2 ed... I_n della maglia n , considerando le correnti di maglia tutte positive nel verso scelto nella maglia.

Il vettore V e' dato da tutti i generatori di tensione di ogni maglia, con tensioni positive, se la corrente di maglia esce dal polo positivo del generatore stesso. Chiaramente se per una maglia ci sono piu' generatori di tensione, essi si sommano col loro segno.

Nella matrice A :

- gli elementi diagonali a_{ii} , sono dati dalla somma delle resistenze che si trovano nella maglia i -esima.
- gli elementi a_{ij} sono dati dalla somma algebrica delle resistenze, che sono comuni alle maglie i e j e dal valore nullo, se queste non vi sono. Se in ognuna di queste resistenze, le correnti di maglia sono nello stesso verso, il segno da attribuire alla resistenza e' positivo, altrimenti sara' negativo.

A questo punto penso di aver riassunto tutte le regole e possiamo passare alla pratica.

Con le suddette regole, riferendoci al nostro semplice circuito, otteniamo finalmente la matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & R_4 \\ 0 & R_4 & (R_4 + R_6) \end{bmatrix}$$

Il Vettore V e' dato invece, dalla sequenza $V = [V, 0, gI_3]$, in quanto I del generatore controllato coincide con I_3 .

Il vettore delle correnti e' banalmente $I = [I_1, I_2, I_3]$.

Trasponendo i vettori V ed I in vettori colonna, si puo' impostare la relazione $V = AI$. Di solito sono le correnti le incognite e sono gia' determinate le tensioni (termini noti); quindi se la matrice e' non singolare, con determinante diverso da zero (e lo e' perche' rappresenta una realta' fisica corretta), si possono trovare le correnti con il prodotto matriciale che da' la soluzione di un sistema.

Tale prodotto vale:

$$I = A^{-1}V$$

dove la matrice A^{-1} e' la inversa di A .

In questo modo viene determinato il valore delle tre correnti di maglia.

Infine, per trovare le correnti che passano per le resistenze comuni a due maglie, ovviamente si fa la differenza tra le due correnti di maglia interessate.

In questo modo il problema e' determinato.

Ma non abbiamo ancora finito.

Se oltre alle resistenze abbiamo elementi induttivi e capacitivi, che hanno memoria temporale (derivate ed integrali)? Non cambia niente: si considerano le impedenze resistive, capacitive ed induttive $R, \frac{1}{sC}, sL$ nel dominio di Laplace ed $R, \frac{1}{j\omega C}, j\omega L$ nel dominio di $s=j\omega$ e dato che sono impedenze, esse si trattano come fossero resistenze, sia nel dominio s che in quello della frequenza. Così si lavora con le matrici, allo stesso modo di come abbiamo fatto per le resistenze.

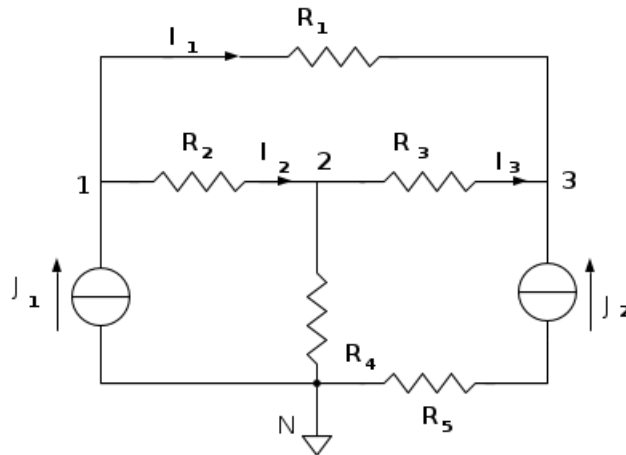
Per esempio nel dominio di Laplace, se R_2 e' un induttore (L_2) ed R_4 una capacita' (C_4), si ha $R_2 \rightarrow sL_2$ ed $R_4 \rightarrow \frac{1}{sC_4}$.

Le tensioni del vettore V saranno le trasformate di Laplace delle tensioni, mentre le correnti incognite del vettore delle correnti, dipenderanno dalla variabile s e dovranno essere antitrasformate nel tempo per ottenere l'andamento temporale di esse.

Per l'analisi in frequenza, basta sostituire alla variabile s , il valore $j\omega$, le tensioni di V diverranno dei fasori e le correnti dipenderanno dalla pulsazione ω . Prendendo di queste le loro parti reali, perche' sono fasori anch'esse, si otterra' l'andamento nel tempo.

Metodo dei nodi.

Stavolta, si propone un circuito come il seguente, che e' caratterizzato da generatori di corrente. Conviene usare un altro metodo per ottenere i dati in corrente ed in tensione: il metodo dei nodi.



Come si vede in figura si prendono dei nodi (in questo caso 1,2,3) ed un nodo di riferimento, N, messo a terra. Il vettore dei termini noti e' ora quello delle correnti, mentre il vettore delle incognite, e' fornito dalle tensioni dei tre nodi rispetto a terra. Il vettore delle correnti (tre elementi, quanti i nodi) e' formato per l'elemento i-esimo dalla somma delle correnti dei generatori di corrente, che entrano nel nodo i-esimo, cambiata di segno.

La matrice A e' cosi' composta da:

- gli elementi in diagonale a_{ii} sono la somma cambiata di segno delle conduttanze

$\left(G_i = \frac{1}{R_i}\right)$, che confluiscono nel nodo i-esimo.

- gli elementi a_{ij} sono ognuno la conduttanza tra il nodo i ed il nodo j.

Detto questo, passiamo a determinare la matrice A del nostro circuito. Otteniamo applicando le regole:

$$A = \begin{bmatrix} -(G_1 + G_2) & G_2 & G_1 \\ G_2 & -(G_2 + G_3 + G_4) & G_3 \\ G_1 & G_3 & -(G_1 + G_3) \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda il vettore correnti avremo:

$$I = \begin{bmatrix} -J_1 \\ 0 \\ -J_2 \end{bmatrix}$$

Infine: si compone il prodotto matriciale:

$$I = AV$$

Le tensioni, ammettendo, come lo e' in realta', che la matrice sia non singolare, sono date dal prodotto matriciale:

$$V = A^{-1}I$$

Per quanto riguarda circuiti analoghi con induttanze e capacita' vale quanto detto per il metodo delle maglie.

Paolo Carlizza, 24 maggio 2013. (Aggiornamento).

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:n-a>"