



paolo carlizza (paolo.carlizza)

OTTICA: GLI SPECKLE ED IL LORO ASPETTO STATISTICO

31 August 2017

In questa sede andiamo a trattare di un fenomeno di propagazione della luce attraverso materiali particolari, che danno risultati un po' "strani" se si proiettano i raggi di una sorgente luminosa su di uno schermo. Sappiamo che in strutture tipicamente deterministiche si producono sullo schermo figure altrettanto deterministiche, tipiche dell'ostacolo che si frappone tra sorgente e schermo (diffrazione ed interferenza). Le cose cambiano drasticamente se invece di uno ostacolo deterministico, se ne frappone uno che porta a considerare interazioni aleatorie, in modo tale da produrre figure altrettanto aleatorie e statisticamente indipendenti sullo schermo. Passiamo a esaminare un caso concreto di questo discorso, che ha l'apparenza di essere astratto ma ha la sua applicazione nell'ottica fisica.

Infatti, se si prende un vetro smerigliato, di una data trasparenza, come ostacolo interposto tra una sorgente laser coerente e monocromatica di diametro di fascio abbastanza limitato e uno schermo di osservazione finale, i risultati appaiono sorprendenti: vedremo apparire sulla schermo un certo numero di macchie dalla distribuzione aleatoria e disordinata, dette "speckle", che possono variare il loro aspetto, se si muove per esempio l'ostacolo in direzione verticale ed orizzontale. Tutto questo, ha delle spiegazioni logiche e razionali, che dipendono da parametri della disturbanza ottica o ampiezza complessa del segnale, che sono l'ampiezza e la fase. Ricordiamo che la disturbanza ottica non è altro che la soluzione ottica dell'equazione di Maxwell, da cui si ricava un vettore complesso (fasore), caratterizzato da un modulo e da una fase (vedi anche Appendice).

Teoria degli speckle

La spiegazione di quanto introdotto nella descrizione dell'articolo non è molto complessa, risponde solo a pochi principi elementari evidenti. Se si prende come ostacolo interposto tra sorgente e schermo finale una struttura non troppo regolare e casuale, come un vetro smerigliato, disposto ortogonalmente a raggi paralleli da una sorgente (semplifichiamo il problema) che attraversa spessori variabili e non periodici per tutta la sua estensione, si può capire, che all'uscita di questa struttura la disturbanza subisce modificazioni in ampiezza e fase, dovute alle differenze di percorso che l'onda ottica fa attraverso le diverse irregolarità della smerigliatura. L'onda attraverso un mezzo di una certa costante dielettrica e quindi di un certo indice di rifrazione reale. La fase della disturbanza, in virtù dei cammini ottici diversi che i raggi di luce producono nei vari punti d'incidenza della lastra, uscirà variata da punto a punto in maniera casuale (noi supponiamo di

non conoscere perfettamente matematicamente il profilo dell'ostacolo punto per punto). Quindi deduciamo che il mezzo interposto abbia una distribuzione aleatoria di trasmissione dell'onda ottica e possiamo sostituire ad esso per comodità un mezzo piano che abbia trasmittanza complessa, con modulo fisso e fase aleatoria in ognuno di N punti scelti, con N abbastanza grande. Il campo che esce da ognuno degli N punti dell'ostacolo con caratteristiche di trasmissione randomica, supponendo nel contributo di ognuno degli N punti, l'ampiezza costante, e la fase uniformemente distribuita tra 0 e π , è rappresentato da un vettore complesso $Ae^{i\varphi}$. Se componiamo tutti questi vettori, che si propagano (vedi appendice in fondo al paragrafo) fino allo schermo in z con ampiezza costante (lo schermo finale è lontano ed i percorsi sono considerati uguali) e fase aleatoria, uno di seguito all'altro, otteniamo "il cammino dell'ubriaco", dove questa serie di vettori ha un percorso che è tutt'altro che deterministico. Nel cammino aleatorio dell'ubriaco, supposto, per il momento su un piano (x,y) , la composizione di tutti questi vettori, se uniamo l'origine del primo vettore al secondo estremo dell'ultimo vettore, darà finalmente la posizione finale del cammino. La Fig. 1 mostra la disposizione degli N vettori a che formano il cammino dell'ubriaco, ognuno di lunghezza a .

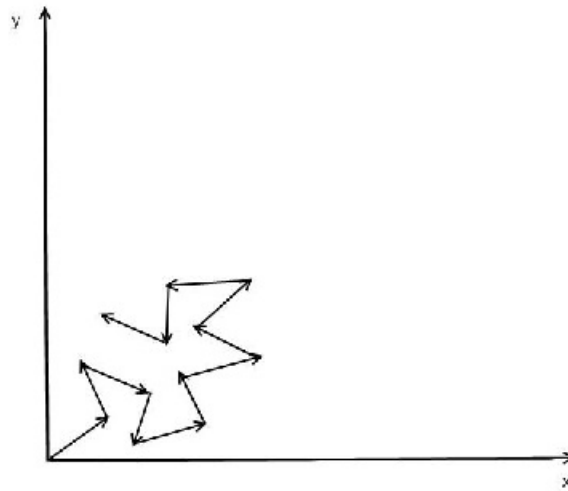


Fig. 1. Rappresentazione sul piano (x,y) del cammino dell'ubriaco

Quindi, se prendiamo una somma di un numero N grande di vettori dalla direzione aleatoria a distribuzione uniforme, il teorema del limite centrale (vedi Riff. [1] e [2]) ci dirà che la funzione densità di probabilità del vettore somma non è altri che la gaussiana bidimensionale (Fig. 2) di forma

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi N a^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{N a^2}}$$

con (x,y) , coordinate del punto di arrivo dell'ubriaco.

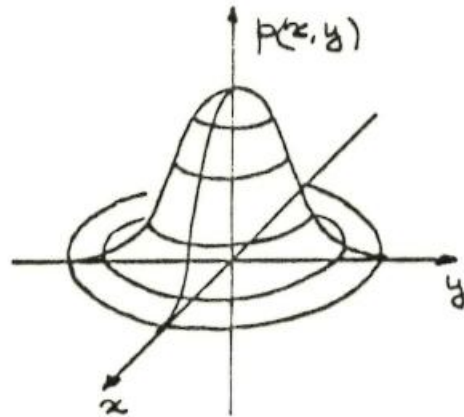


Fig. 2. Gaussiana bidimensionale

Sostituendo le coordinate polari avremo per la probabilità elementare dell'ampiezza del vettore somma tra r e $r + dr$

$$dp(r) = \frac{1}{\pi N a^2} e^{-\frac{r^2}{N a^2}} r dr d\theta$$

Integrando tra 0 ed r , avremo tutto in funzione di r e con i calcoli otterremo che la densità di probabilità in funzione di r è pari a

$$p(r) = \frac{2r}{\pi N a^2} e^{-\frac{r^2}{N a^2}}$$

Ritornando al campo su di un punto dello schermo, che si è propagato con fase iniziale randomica ed ampiezza costante da una delle N areole, questo subisce le stesse vicissitudini del cammino dell'ubriaco e quindi la distribuzione del campo come ampiezza è sempre una Rayleigh (vedi Rif. [2]), proveniente da una gaussiana bidimensionale. Dato che l'intensità I è il quadrato dell'ampiezza, ovvero $I = r^2$ la distribuzione dell'intensità diventa un'esponenziale (vedi Rif. [2]), ossia

$$p(I) = \frac{1}{N a^2} e^{-\frac{I}{N a^2}}$$

e dato che $N a^2$ è il valore atteso o medio di I , indicato con $\langle I \rangle$, possiamo scrivere anche

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}}$$

Puntualizziamo sul fatto che queste formule valgono anche nel caso generale in cui le ampiezze dei vettori randomici non dovessero essere le stesse, dove al posto di N compare qualche altra espressione simile, ma nulla cambia nella sostanza dei risultati. Fatto questo possiamo dire che siamo capaci di calcolare la probabilità che l'intensità del campo sia compresa tra due valori I_1 e I_2 in un punto (x,y) dello schermo a distanza z . Questa va però confrontata i valori sperimentali dell'intensità stessa misurate e questo confronto può avvenire solo su basi statistiche. Ciò significa che dovremmo disporre di un gran numero di realizzazioni dello stesso esperimento e di altrettante misurazioni dei valori, sempre in uno stesso punto. Quindi avendo raccolto un numero grande di valori d'intensità misurate si vede quanti campioni stanni tra I_1 e I_2 e fatto il rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili si ottiene la probabilità da confrontare con il valore teorico. Questo si potrebbe fare anche cambiando per ogni realizzazione, il vetro smerigliato che abbia sostenuto lo stesso trattamento di smerigliatura. Infine si può operare calcolando, anche su punti diversi sullo schermo e trovare tante realizzazioni per i confronti con le misure delle intensità, a patto che le intensità nei punti scelti siano indipendenti e/o scorrelate. Questo procedimento è perfettamente equivalente a quello del cambio del diffusore, se si prendono i punti abbastanza lontani da dare misure scorrelate. Se i punti sono vicini le intensità differiranno di poco e si perde l'equivalenza dei procedimenti e l'approccio puramente statistico. Si può introdurre una grandezza, chiamata contrasto pari a

$$c = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}$$

I bracket o la simbologia di maggiore e minore, in questo caso indicano che si calcola il valore atteso o medio di una grandezza.

Se calcoliamo il valore del contrasto per una certa distribuzione o per un determinato vetro smerigliato, il valore viene unitario, dopo aver inserito nella formula i valori calcolati con la distribuzione esponenziale (vedi Rif. [1]). Se invece consideriamo una sovrapposizione di M profili smerigliati, con le loro distribuzioni d'intensità, le fluttuazioni d'intensità sullo schermo si affievoliscono, tendendo ad uniformarsi. Questo lo si vede, perché la distribuzione dell'intensità totale dovuta alla sovrapposizione di tutte le smerigliature ha per variabile aleatoria la somma delle diverse intensità dovute ad ogni strato smerigliato e quindi la densità di probabilità non è altro che la convoluzione di delle distribuzioni esponenziali di I (Rif. [2]), dai valori medi differenti. La nuova densità di probabilità globale (vedi anche Rif. [1]) risulta essere:

$$p_t(x) = \frac{M^M}{(M-1)!} x^{M-1} e^{-Mx}$$

In Fig. 3 viene presentata la densità di probabilità in funzione di M ; più M aumenta, più le curve si restringono, avvicinandosi al valore $x=1$.

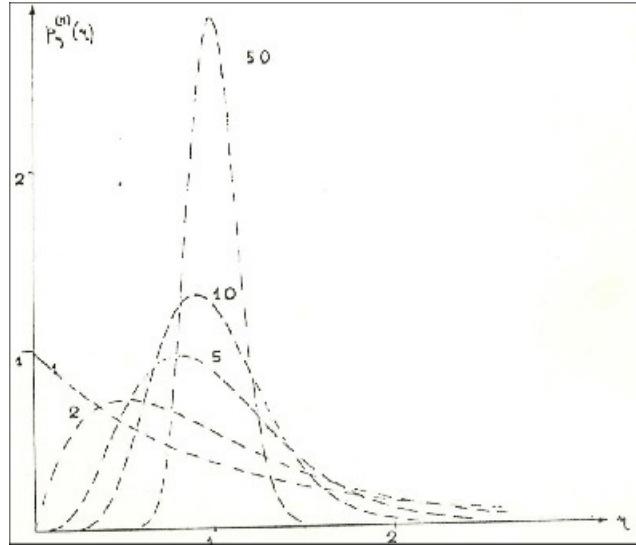


Fig. 3. Densità di probabilità di N diffusori smerigliati sovrapposti.

D'altronde se si calcola il contrasto questi diventa pari ad $1/M$.

La funzione di correlazione del campo diffuso.

Per vedere se le intensità di due punti P_1 e P_2 su uno schermo illuminato da una radiazione ottica sono correlate o meno, come nel caso della diffusione, esiste un indice matematico che misura la correlazione delle stesse. La funzione di correlazione è definita come

$R(P_1, P_2) = \langle V(P_1)V^*(P_2) \rangle$, dove V è l'ampiezza complessa del campo e l'asterisco indica l'operazione di coniugazione complessa. Se i due punti 1 e 2 coincidono, allora si ottiene l'intensità media di un punto. Un interessante esempio è quello di calcolare la funzione di correlazione tra due punti P_1 e P_2 dello schermo in z , nel caso usiamo un diffusore appunto come il vetro smerigliato. Supponendo la funzione di trasmissione di questo del tipo

$$t(x, y) = e^{i\varphi}$$

con valori di φ completamente scorrelati nei due punti interessati, si può calcolare la funzione di correlazione $R(x, y)$ nel caso di approssimazione di Frésnel (per la formula del campo ed implicazioni associate di veda il Rif. [1]). Il risultato che ne viene fuori, considerando l'ampiezza della disturbanza A :

$$R(P_1, P_2) = \frac{A^2}{D^2} e^{\frac{ik}{2D}[(x_1^2 + y_1^2)^* - (x_2^2 + y_2^2)]} \cdot \iint |t(\xi, \eta)|^2 e^{-\frac{ik}{D}[(x_1^2 - y_1^2)\xi + (x_2^2 - y_2^2)\eta]} d\xi d\eta$$

Quindi la funzione R è data dal prodotto di due fattori, di cui il primo dipende dalla geometria, mentre il secondo è la trasformata di Fourier bidimensionale dell'intensità del campo emergente dal diffusore. E' evidente che la correlazione di due punti in un piano $z=D$, dipende solo dalla

distanza dei due punti e dalla giacitura della loro congiungente. Se il campo sorgente dovesse essere un disco di diametro d , centrato nell'origine del piano $z=0$, avremo che la correlazione R come andamento, ci si avvicina ad una tipica figura di diffrazione di Fraunhofer (vedi Rif. [1]), ovvero possiede un picco centrale, per poi ondularsi, diminuendo via via di intensità (Fig. 4).

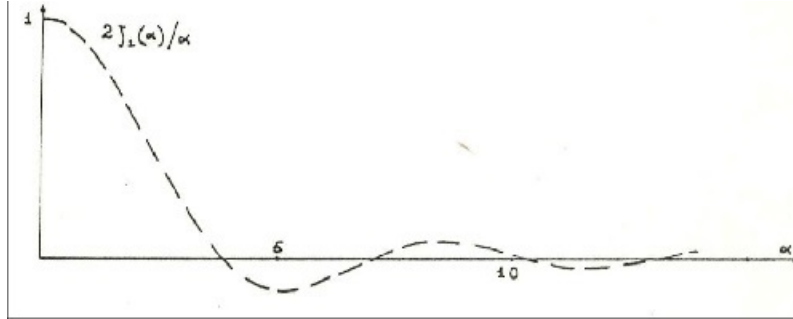


Fig. 4. Correlazione di una sorgente a disco centrata nell'origine del piano $(x,y,z=0)$

L'espressione matematica è la seguente:

$$\frac{\pi^2 A^2 d^2}{4D^2} e^{\frac{ik}{2D}(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \left[\frac{2J_1\left(\frac{k\rho d}{2D}\right)}{\frac{k\rho d}{2D}} \right]$$

dove la J_1 è la funzione di Bessel modificata di ordine 1 e ρ_1 e ρ_2 le distanze dall'origine dei due punti del piano di osservazione. E' utile introdurre a questo punto una funzione di correlazione normalizzata, tale che:

$$r(P_1, P_2) = \frac{R(P_1, P_2)}{\sqrt{\langle I(P_1) \rangle \langle I(P_2) \rangle}}$$

che presenta modulo minore o pari ad 1. In tal caso la correlazione calcolata prima diventa:

$$r(P_1, P_2) = e^{\frac{ik}{2D}(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \left[\frac{2J_1\left(\frac{k\rho d}{2D}\right)}{\frac{k\rho d}{2D}} \right]$$

In questo contesto è utile definire l'area di correlazione come quella per cui $|r(P_1, P_2)| \leq 0.88$. Facendo i conti con la formula precedente, essa risulta essere di diametro all'incirca pari a $0.64 \frac{\lambda D}{d}$.

Finora abbiamo trattato sulla correlazione per le ampiezze e dato che l'intensità è il quadrato di esse, si può calcolare, mediante le trasformazioni delle funzioni di distribuzione (Rif. [2]), la nuova correlazione per le intensità nei punti 1 e 2 (vedi Riff. [1] e [2]). Essa è

$$\langle I(P_1)I(P_2) \rangle = \langle I(P_1) \rangle \langle I(P_2) \rangle [1 + |r(P_1, P_2)|^2]$$

La correlazione fra le parti variabili dell'intensità si ottiene tenendo conto

$$I(P_1) = \langle I(P_1) \rangle + \Delta I(P_1)$$

$$I(P_2) = \langle I(P_2) \rangle + \Delta I(P_2)$$

e inserendo nella formula della correlazione per le intensità si ottiene

$$\Delta I(P_1) \cdot \Delta I(P_2) = \langle I(P_1) \rangle \langle I(P_2) \rangle |r(P_1, P_2)|^2$$

Concludiamo qui la trattazione omettendo successivi sviluppi, che ci allontanano del tema centrale, che spiega il fenomeno di produzione di macchie statistiche d'intensità, con la diffusione della luce attraverso un ostacolo trasparente e smerigliato, delle è esaminato anche l'aspetto di correlazione spaziale tra i vari punti illuminati di uno schermo di osservazione.

Appendice.

A scopo di aiuto nella comprensione della trattazione, andiamo a vedere cosa s'intende per disturbanza ottica: essa è soluzione dell'equazione di Maxwell, trasformata di quella di Helmholtz, per qualunque componente del campo elettrico o magnetico (vedi Rif. [1]).

Il campo su un piano che ha coordinate (x,y,0), ossia un piano con z=0 e' supposto come sviluppo integrale si onde piane elementari(*)

$$A(p,q) = A e^{2\pi i(px + qy)}$$

dove A(p,q) è detto spettro di onde piane e

$$k_x = 2\pi p$$

$$k_y = 2\pi q$$

e

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

in cui k è il vettore di propagazione dell'onda piana (vedi tutto in Rif. [1]).

Quindi per integrazione

$$V(x, y, 0) = \iint A_0(p, q) e^{2\pi i(px + qy)} dp dq.$$

Ogni onda piana elementare si propaga in z e quindi per il campo su un piano z, si deve moltiplicare ognuna di queste per un fattore di propagazione pari a

$$e^{ik_z z}$$

Quindi

$$V(x, y, z) = \iint A_0(p, q) e^{2\pi i(px + qy + mz)} dp dq$$

Questo integrale rappresenta una trasformata di Fourier in due dimensioni, quindi per sua inversione, si ottiene:

$$A(p, q) = \iint V(\xi, \eta, 0) e^{-2\pi i(px + qy)} d\xi d\eta$$

Sostituendo A(p,q) nell'espressione di V(x,y,z) finalmente si ottiene:

$$V(x, y, z) = \iint V(\xi, \eta, 0) K(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta$$

con

$$K(x - \xi, y - \eta, z) = \iint e^{2\pi i(p(x - \xi) + q(y - \eta) + mz)} dp dq$$

(*) Lo sviluppo in onde piane viene dalla teoria delle trasformate di Fourier. Nel caso del dominio temporale c'è una trasformazione sulla funzione data dal tempo alla frequenza, mentre con una funzione spaziale a due variabili cartesiane x e y, mediante doppia trasformata di Fourier ci si riduce ad una corrispondente funzione a due variabili, le frequenze spaziali p e q.

Riferimenti Bibliografici

1. Franco Gori, Dipartimento di Fisica, Roma Terza università, franco.gori@uniroma3.it, Tel. 0657337036, Elementi di Ottica, Ed. Accademica, Roma 1995.

2. Paolo Mandarini, Teoria dei segnali. Elementi, Ed. La Goliardica, Roma 1976.

3. G. Trasformata di Fourier 2D, <http://www.fis.unical.it/files/fl178/2753trasformataFourier2D.pdf>

Per il Rif. 1, si consiglia di consultare il capitolo degli speckle e relative appendici.

Per il Rif. 2 si esamini la parte di teoria della probabilità'.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:ottica-gli-speakles-ed-il-loro-aspetto-statistico>"