



paolo carlizza (paolo.carlizza)

PRINCIPI TEORICI DI OTTICA GEOMETRICA

21 July 2017

La gamma delle onde elettromagnetica è talmente vasta, che nel variare la loro frequenza cambiano i comportamenti d'interazione con la materia e lo spazio in cui esse si propagano. Queste onde, che si traducono propagazione di campi elettrici e magnetici non stazionari nello spazio, sono irradiate da concentrazioni di campi e di cariche, in base a meccanismi molto veloci di accelerazione della carica elettrica e induttivi. Quindi per questo si può dire che l'irradiazione avviene solo quando le dimensioni dell'oggetto irradiante è comparabile con la lunghezza d'onda della radiazione e capita quindi che un dipolo a mezza lunghezza d'onda sia capace d'irradiare nella banda televisiva.

Ma quando ci si avvicina a frequenze vicine a quella della luce o dello spettro visibile, gli effetti dei fenomeni elettromagnetici cambiano e si evidenziano in oggetti dell'ordine di dimensioni molto minori rispetto alle onde che si trovano nello spettro del non visibile.

Senza spiegare di più, dato che le frequenze del visibile sono altissime in molti studi si può considerare che la lunghezza d'onda tende a zero e per questo nasce lo sviluppo dell'ottica geometrica e del comportamento dei raggi luminosi in un mezzo differente dal vuoto, dotato di costante dielettrica diversa dal suo valore nel vuoto e indice di rifrazione con valori maggiori di uno.

Comunque c'è da fare anche un piccolo passo indietro, perché l'indice di rifrazione non modifica i fronti d'onda solo nel campo ottico, ma anche a livello di onde radio, per cui ci si trova a studiare teorie di propagazione troposferica delle onde radio, che sono capaci di andare oltre la curvatura terrestre.

Ma intanto occupiamoci di ottica geometrica, dove gli studi sono fatti, pensando che la lunghezza d'onda tende a zero. Un'avvertenza: chi legge quest'articolo deve conoscere in maniera sufficiente tutta la matematica vettoriale, perché molti passaggi sono ritenuti ovvi.

Introduzione

Sappiamo che le onde elettromagnetiche sono state studiate ed inglobate nella teoria delle equazioni di Maxwell e per farla breve sappiamo che una componente del campo elettromagnetico (elettrica o magnetica, chiamata disturbanza) obbedisce all'equazione delle onde di Maxwell, che esplicitata, secondo la costante di propagazione k_0 e l'indice di rifrazione n , assume la seguente forma:

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k_0^2 n^2(x, y, z) U(x, y, z) = 0$$

dove $U(x,y,z)$ è la disturbanza in funzione delle coordinate spaziali. L'equazione è valida per un mezzo omogeneo ed isotropo, dove non vi sono correnti e campi che fungono da sorgenti.

Dato che $U(x,y,z)$ è una componente di un campo elettromagnetico, essa possiederà un'ampiezza e una fase, dipendenti anch'esse dalle coordinate. Sia quindi:

$$U(x,y,z) = A(x,y,z)\exp(ik_0S(x,y,z))$$

dove $A(x,y,z)$ è l'ampiezza della disturbanza e $S(x,y,z)$ la sua fase, dipendenti entrambe dalle coordinate.

Se introduciamo l'espressione di $U(x,y,z)$ nella equazione di Maxwell per la disturbanza, otteniamo, dopo lunghi e tediosi calcoli vettoriali (vedasi Rif. [1]) due equazioni finali, che sono:

$$\nabla^2 A + k_0^2 A(n^2 - |\nabla^2 S|) = 0 \quad (1)$$

$$A\nabla^2 S + 2\nabla A \cdot \nabla S = 0 \quad (2)$$

Dato che stiamo trattando l'ottica geometrica, è opportuno qui introdurre l'approssimazione che le compete.

L'ottica geometrica si occupa di frequenze che cadono nella finestra del visibile, per cui le frequenze sono abbastanza alte, per questo nella prima equazione il primo termine è trascurabile rispetto al secondo, perché k_0 dipende linearmente da ω e quindi da λ che tende a zero.

Per questo ragionamento la prima equazione delle due si può scrivere:

$$\nabla S \cdot \nabla S = |\nabla S|^2 = n^2$$

La funzione S è detta iconale e la prima delle due equazioni è denominata equazione iconale, in quanto essa descrive la variazione spaziale della fase del fronte d'onda con l'indice di rifrazione n . Una volta risolta la prima delle due equazioni, la seconda darà l'ampiezza dell'onda nello spazio.

C'è da sottolineare che la superficie $S=\text{cost}$, che è equifase, ha per normale in ogni suo punto il gradiente di S , che è tangente alle "linee di forza", che rappresentano i raggi luminosi.

Lo si vede pensando che la derivata direzionale lungo S è nulla e questa si può scrivere come il prodotto scalare del versore di una linea di percorrenza sulla superficie equifase per il gradiente di S . Tale prodotto scalare è nullo e quindi il gradiente di S è normale al versore di percorrenza sulla superficie S . Questo fa sì che il gradiente di S è normale alla superficie equifase.

Di conseguenza per un raggio luminoso, introduciamo un'ascissa curvilinea ed il versore lungo questa nuova ascissa curvilinea è pari a

$$\mathbf{s}_0 = \nabla S / n = d\mathbf{r} / ds \quad (3)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore posizione del punto P generico sul raggio ottico. Di conseguenza si ha:

$$\nabla S = n\mathbf{s}_0 d\mathbf{r} / ds$$

Dividendo la (2) per A , si ha:

$$\nabla^2 S + \nabla S \cdot \nabla (\ln A^2) = 0$$

Inserendo la (3) in quest'ultima

$$\nabla S + n \mathbf{s}_0 \cdot \nabla S + n \frac{d(\ln A^2)}{ds}$$

da cui si ottiene finalmente:

$$\frac{d(\ln A^2)}{ds} = -\frac{\nabla^2 S}{n}$$

In Fig. 1 è mostrata graficamente la geometria che presuppone l'equazione iconale o del gradiente di S.

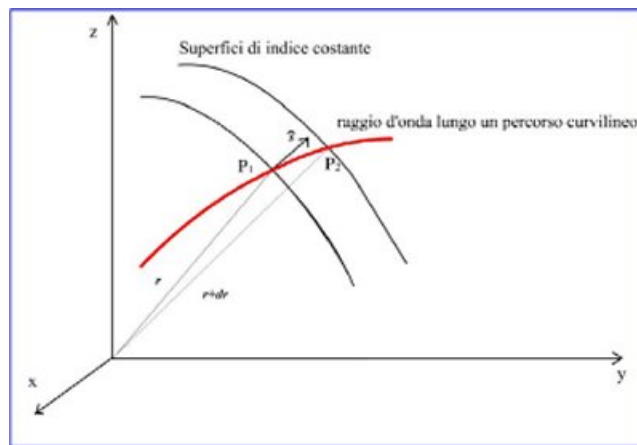


Figura 1. Geometria del raggio luminoso e dei suoi fronti d'onda S.

Principio del minimo percorso o di Fermat

Poiché $n \mathbf{s}_0$ risulta essere il gradiente della grandezza S, esso è anche un campo conservativo e l'integrale tra due punti P_1 e P_2 è indipendente dal percorso nello spazio e in più risulta nullo lungo una linea chiusa.

Quindi:

$$\oint_C n \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

per una linea chiusa e

$$\int_{P_1}^{P_2} n \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla S \cdot d\mathbf{l} = S_2 - S_1$$

da un punto P_1 ad uno P_2 .

Se i punti si trovano su uno stesso raggio luminoso si ha che $\mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{l} = ds$

ed avremo

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = S_2 - S_1$$

ma e' anche

$$\int_{P_1}^{P_2} n \mathbf{s}_0 \cdot d\mathbf{l} \leq \int_{P_1}^{P_2} n dl$$

L'integrale a secondo membro è detto cammino ottico.

Da qui si può dedurre il principio di Fermat, che enuncia: *"Qualunque percorso su un raggio luminoso è sempre minimo, rispetto a tutti gli altri percorsi che congiungono due punti"*.

Equazione dei raggi ottici

Abbiamo quindi appurato dalla (1) che

$$|\nabla^2| = n^2$$

e di conseguenza

$$\nabla S = n \mathbf{s}_0$$

$\mathbf{s}_0$ è il versore tangente al raggio luminoso con ascissa curvilinea s , normale alla superficie equifase $S(\mathbf{r})$

Calcoliamo la derivata secondo la direzione s di $n \mathbf{s}_0$, ovvero

$$\frac{d(n \mathbf{s}_0)}{ds} = \frac{d(\nabla S)}{ds}$$

Evitando di scrivere ancora formule, sappiamo che il gradiente di S non è altro che un vettore che ha per le tre componenti in x, y, z le derivate parziali di S stesso.

Quindi, consultando il Rif. [1] si possono vedere in dettaglio tutti i calcoli che danno la derivata direzionale del gradiente di S nelle tre componenti ed ottenere le seguenti formule finali:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds} = \frac{d(\nabla S)}{ds} = \nabla n$$

Questa è l'equazione del raggio ottico, che risulta essere molto problematica calcolarla in forma chiusa, tranne che in alcuni casi più semplici.

Per i casi più complicati è utile ricorrere alla analisi numerica e calcolare l'equazione con il metodo di Runge - Kutta.

Se n è costante ed il mezzo omogeneo, il versore del raggio mantiene direzioni e verso costanti e il raggio è una retta. Se n ha una simmetria sferica dipendente da un punto centrale allora $n = n(r)$ e quindi esso dipende solo dal raggio r della sfera.

Ora, in questo caso, calcoliamo la seguente derivata direzionale:

$$\frac{d(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times n\mathbf{s}_0 + \mathbf{r} \times \frac{d(n\mathbf{s}_0)}{ds}$$

Il primo membro a destra dell'uguaglianza si annulla, perché prodotto vettoriale di due vettori paralleli, mentre il secondo diventa

$$\mathbf{r} \times \nabla n,$$

quantità anch'essa nulla per lo stesso motivo del primo termine. La derivata direzionale a primo membro risulta quindi nulla e la quantità entro parentesi è quindi costante, ovvero si ha:

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{s}_0 = \text{cost}$$

Detto φ l'angolo tra il vettore $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}_0$, si ottiene:

$$nr \sin \varphi = C$$

Questa formula sintetizza la legge di Bouguer, che è simile a quella della conservazione del momento di quantità di moto dei moti centrali.

Un caso particolare di questa legge può essere quello di un andamento di n stratificato che dipende dalla quota z e non più da r (vedi Fig. 2).

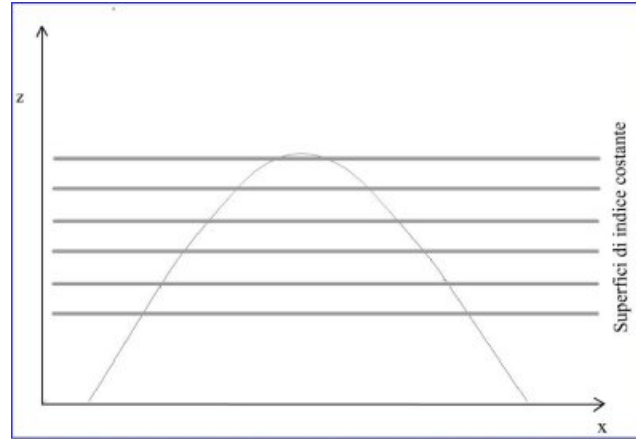


Figura 2. Raggio ottico in un mezzo stratificato.

Per questo r nell'ultima formula è inglobato nella costante ed abbiamo:

$$n(z) \sin \phi = n(z_0) \sin \phi_0$$

con ϕ angolo tra la direzione z e la tangente al raggio ottico.

In questo caso se la direzione x è perpendicolare alla quota z ed un raggio si sviluppa nel piano x - z , si ha certamente:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\tan \phi}$$

Dall'equazione di Bouguer, considerando ϕ compreso tra 0 e π , si ricava la relazione:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{C^2}{n^2(z)}}$$

Inserendo a secondo membro del rapporto differenziale tra dx e dz , si ottiene:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{C} \sqrt{n^2(z) - C^2}$$

Questa è un'equazione differenziale che si può risolvere col metodo delle variabili separabili, che da' come soluzione:

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2(z)}{C^2} - 1}} dz$$

La determinazione della costante C , dipende dalle condizioni iniziali n_0 e ϕ_0 .

I miraggi

Come esempio di applicazione di quanto detto, studiamo il fenomeno del miraggio, ben noto perché si osserva frequentemente, per esempio sulle strade d'estate. Le zone dell'asfalto più lontane dall'osservatore sembrano bagnate, salvo risultare perfettamente asciutte quando l'osservatore si avvicina ad esse. In realtà tali zone si comportano come riflettenti; l'attribuire questa riflessione alla presenza di acqua è un'interpretazione legata a due fattori: a) la nostra radicata ma errata convinzione che i raggi luminosi debbano per forza procedere in linea retta e che possano deviare solo se riflessi; b) l'identificazione fra quello che osserviamo e ciò che abbiamo altre volte osservato in presenza di chiazze d'acqua sul terreno. Fisicamente, ciò che accade è che gli strati d'aria prossimi all'asfalto sono più caldi e quindi meno densi di quelli sovrastanti, di conseguenza si ha un gradiente verticale dell'indice di rifrazione. I raggi luminosi si incurvano, cosicché un raggio, inizialmente diretto verso il basso, può arrivare a incurvarsi verso l'alto prima di incontrare il terreno, raggiungendo l'osservatore come se fosse stato riflesso. Dato che i gradienti in gioco sono piccoli, solo i raggi con un angolo φ_0 prossimo a $\pi / 2$ subiscono il fenomeno; è per questo che, avvicinandosi, si ha la sensazione che l'acqua sparisca.

Per trovare la forma dei raggi adottiamo un modello semplice per $n(z)$:

$$n(z) = n_{min} + \beta z$$

$$\text{con } 0 \leq z \leq z_{min}$$

Se inseriamo l'indice n nella soluzione trovata alla fine del paragrafo precedente, con il cambiamento di variabile seguente:

$$Z = \frac{n_{min} + \beta z}{C}, \text{ si ottiene:}$$

$$\frac{\beta x}{C} = \int \frac{1}{\sqrt{Z^2 - 1}} dZ$$

$$\frac{\beta(x - x_0)}{C} = \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{C^2 Z^2 - 1}} dZ$$

Risolvendo:

$$\ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}) = \frac{\beta x}{C} + \text{cost}$$

ossia:

$$Z + Z\sqrt{Z^2 - 1} = A e^{\frac{\beta x}{C}}$$

Come condizione al contorno dobbiamo sapere il valore di n_0 in un punto P_0 di coordinate (x_0, z_0) . Con la formula della legge Bouguer si ottiene il valore di C , e con l'espressione del cambio di

variabile $z \rightarrow Z$ si ottiene il valore di Z nel punto noto P_0 . Con questi ultimi due passi si è ricavato A , che risulta positivo in $0 \leq z \leq \pi$ e per questo possiamo porre:

$$A = e^{\frac{-\beta x_p}{C}}$$

dove x_p è un opportuno valore (positivo, negativo o nullo)

Risolvendo l'equazione logaritmica appena trovata otteniamo finalmente:

$$Z = \cosh \left[\frac{\beta(x - x_p)}{C} \right]$$

e tenendo conto sempre della relazione del cambio di variabile da $z \rightarrow Z$, finalmente si ha l'espressione finale del raggio del miraggio.

$$z(x) = \frac{1}{\beta} C \cosh \left[\frac{\beta(x - x_p)}{C} \right] - n_{min}$$

Andamento dell'intensità luminosa e tubi di flusso

Il valore dell'intensità media di un'onda piana sinusoidale vale:

$$I = \frac{E^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu_r}} \simeq n \frac{n E^2}{2 Z_0}$$

supponendo che μ_r sia tendente ad uno, come è vale in realtà, mentre Z_0 è l'impedenza caratteristica del vuoto pari a $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, mentre n , indice di rifrazione è pari a $\sqrt{\epsilon_r}$

Trascuriamo le costanti di proporzionalità e per semplicità poniamo $I = n A^2$.

Se ricordiamo la (2) all'inizio dell'articolo, detta anche equazione di trasporto ed vi inseriamo l'intensità, essa diventa:

$$\frac{d}{ds} \left(\ln \left(\frac{I}{n} \right) \right) = - \frac{\nabla^2 S}{n}$$

Integrando questa equazione fra due punti generici P_1 e P_2 con ascisse curvilinee s_1 e s_2 , so ottiene:

$$I(s_2) = \frac{n(s_2)}{n(s_1)} I(s_1) e^{-\int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 S}{n} ds}$$

Se si moltiplica l'equazione di trasporto per A si ottiene:

$$A^2 \nabla^2 S + 2A \nabla A \cdot \nabla S = \nabla \cot(a^2 \nabla S) = 0,$$

che si riduce in base al valore del gradiente di S (indice n moltiplicato per il versore del raggio) a

$$\nabla \cdot (I s_0) = 0$$

Il campo $I s_0$ è solenoidale, in quanto la sua divergenza è nulla.

A questo punto, andiamo a definire un tubo di flusso di energia, come una superficie chiusa costituita lateralmente da raggi luminosi ed ortogonalmente da due superfici d'onda (vedi Fig. 3).

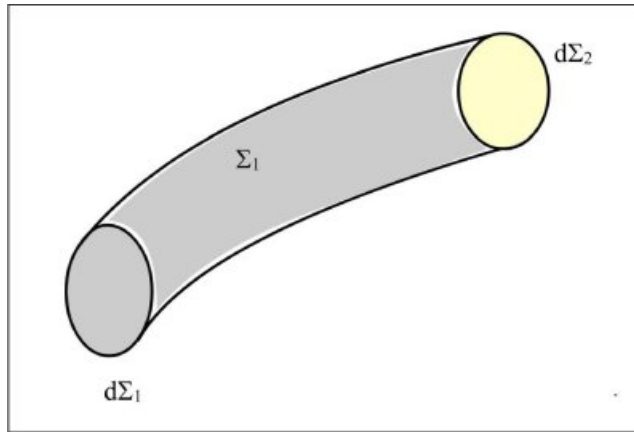


Figura 3. Rappresentazione di un tubo di flusso..

Supponiamo le superfici $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$ abbastanza piccole, all'inizio ed al termine del tubo di flusso, in modo tale che il vettore di Poynting Π su di esse sia quasi costante, per la conservazione dell'energia di ha:

$$\int_{\Sigma} |\Pi \cdot n_0| d\Sigma = \int_{d\Sigma_1} |\Pi \cdot n_0| d\Sigma_1 + \int_{d\Sigma_2} |\Pi \cdot n_0| d\Sigma_2 + \int_{d\Sigma_l} |\Pi \cdot n_0| d\Sigma_l =$$

$$= - |\Pi_1| d\Sigma_1 + |\Pi_2| d\Sigma_2 = 0$$

dove $|\Pi_1|$ e $|\Pi_2|$ sono i vettori locali di Poynting sulle superfici Σ_1 e Σ_2 e Σ_l la superficie laterale del tubo di flusso.

Quindi si può scrivere:

$$I_1 d\Sigma_1 = I_2 d\Sigma_2.$$

Questa è la legge d'intensità dell'ottica geometrica, per la quale l'intensità varia in ragione inversamente proporzionale alla sezione del tubo.

Si definisce come fattore di divergenza

$$u^2 = \frac{|\Pi_2|}{|\Pi_1|} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1}$$

Queste considerazioni tengono conto dell'eventuale attenuazione dell'onda ottica, dovuto all'allargamento del fronte d'onda con la propagazione e cio' avviene anche in un mezzo privo di perdite.

Vedasi Fig. 4 per le geometrie dei raggi principali e le caustiche C_i , punti dove i raggi si incontrano.

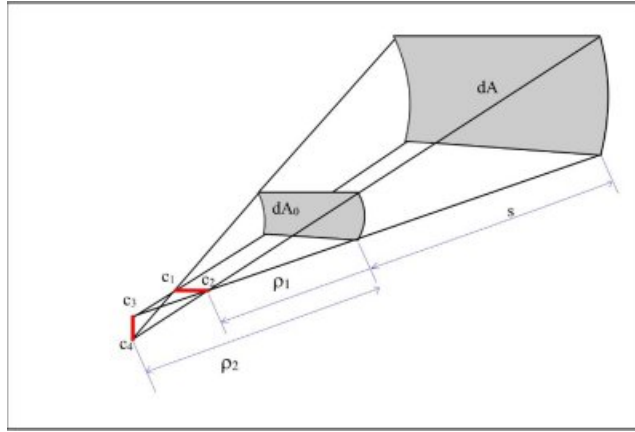


Figura 4. Fronti d'onda per raggi rettilinei.

Nell'ipotesi di mezzo omogeneo con propagazione rettilinea si può dimostrare che

$$u(\rho_1, \rho_2, s) = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}}$$

Dove $\rho_1 \rho_2$ sono i raggi di curvatura principali dell'onda.

Tre casi si distinguono:

1. Onda sferica.

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 \Rightarrow u = \frac{\rho_0}{\rho_0 + s}$$

2. Onda cilindrica.

$$\rho_1 = \infty, \rho_2 = \rho_0 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_0 + s}}$$

3. Onda piana.

$$\rho_1 = \rho_2 = \infty \Rightarrow u = 1$$

Il fattore di divergenza permette di capire come evolve l'ampiezza del campo lungo il raggio ottico. Se il mezzo è omogeneo, si può risolvere l'equazione differenziale dei raggi, precedentemente calcolata, ottenendo che la propagazione dell'onda ottica è descritta dalla seguente relazione.

$$U(s) = U(0) \cdot u(\rho_1, \rho_2, s) \cdot e^{iks}$$

Sapendo il campo in un punto noto P_1 si può sapere quanto vale il campo in P_2 .

La relazione non vale più in zone nell'intorno del raggio dove il campo si annulla (punti omocentrici, dove tutti i raggi passano per un punto; in questo caso il fattore di divergenza va all'infinito ed il campo diverge).

Questi punti, sono in generale, i fuochi o le caustiche, dove i raggi s'incontrano. Ivi l'ampiezza A del campo varia molto rapidamente e non si può più fare l'approssimazione di ottica geometrica ed occorre passare all'ottica ondulatoria dove si considera nella sua interezza l'equazione 1.

Quindi abbiamo visto il comportamento dei raggi elettromagnetici, nel nostro caso ottici, anche nella troposfera.

Per riportarci alle nostre attuali finalità di propagazione di segnali radio, occorre modificare l'equazione iconale e considerarla tutta intera, poiché le frequenze non hanno la proprietà di essere elevatissime come quelle ottiche. La mia parte descrittiva termina qui a livello ottico. Nel campo delle radiofrequenze, un certo numero di capicissimi colleghi di "Electro You" hanno scritto bellissimi articoli di radiotecnica e di ponti radio, dove andare a vedere la propagazione troposferica delle radiofrequenze stesse e per questo settore rimando con grande stima a loro.

Riferimenti

1. Dispensa dei Proff. S. Bianchi, U. Sciacca, A. Settimi - Ottica Geometrica Classica: propagazione nei mezzi disomogenei. (Metodo dell'Iconale) - Università Sapienza - Roma - Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Roma

Bibliografia

2. Balanis, C. A., (1989) Advanced Engineering Electromagnetics, Wiley.
3. Bertoni, H. L., (2000) Radio Propagation for Modern Wireless Systems, Prentice Hall.
4. Born, M., and Wolf, E., (1993) Principles of Optics, Cambridge University Press.
5. Felsen, L. and Marcuvitz, N., (1994) Radiation and scattering of waves, IEEE.
6. Kline, M. and Kay, I., (1965) Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, Interscience.
7. Sommerfeld, A. J. W., (1954) Optics, Academic Press.
8. Gori F. (1995) Elementi di Ottica, Ed. Accademia Roma.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:principi-teorici-di-ottica-geometrica>"