



paolo carlizza (paolo.carlizza)

STUDIO SUI DIELETTRICI E SULL'INDICE DI RIFRAZIONE CON LA FREQUENZA

18 April 2013

Le onde elettromagnetiche costituiscono una realtà fisica di campo che si propaga con una certa velocità in presenza di materia, anche se esiste un modello matematico, che le vede propagarsi nel vuoto (il vuoto assoluto non esiste e' solo un'astrazione, per dire che c'e' quasi assenza di materia).

Queste perturbazioni risentono delle proprietà elettriche e magnetiche del mezzo, che ne limita la velocità. La velocità nel vuoto corrisponde a quella della luce c , mentre in un mezzo formato da atomi, essa ne e' sempre minore e legata appunto alle caratteristiche del mezzo attraversato. Vi sono due parametri che caratterizzano un mezzo fisico diverso dal vuoto: la costante dielettrica ϵ e la permeabilità μ magnetica, che rappresentano una certa inerzia che si oppone alla propagazione del campo elettromagnetico.

Nel vuoto, queste costanti, denominate ϵ_0 e μ_0 valgono rispettivamente $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$ e $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{Wb m/A}$

In un mezzo diverso dal vuoto a causa dell'interazioni del campo em. con le cariche elettriche degli atomi, i valori sono diversi a seconda del numero atomico Z degli atomi componenti il mezzo stesso.

La velocità del campo em. che si propaga nel vuoto vale $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, mentre in un mezzo diverso dal vuoto è $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$, con $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ e $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, con ϵ_r, μ_r costanti dielettrica e permeabilità relative del mezzo. Quindi, ϵ_r, μ_r dipendono dalle caratteristiche atomiche del mezzo.

Infine, si definisce come indice di rifrazione n il rapporto tra la velocità del campo elettromagnetico in un mezzo diverso dal vuoto e la velocità dello stesso nel vuoto.

In questo articolo si tratterà dell'interazione dei campi elettromagnetici in mezzi diversi dal vuoto (dielettrici) e si valuterà il comportamento di questi con la frequenza del campo.

Si sa che un campo em, poiché implica la presenza di un campo elettrico viaggiante, produce spostamento nelle cariche elettriche protone - elettroni di un atomo e di conseguenza, deformazioni atomiche.

Proprio per questo, gli atomi si comportano come dipoli oscillanti alla frequenza del

campo em. viaggiante e possiamo considerare per gli atomi che si deformano, una relazione pari ad $\alpha \cdot \delta = Z \cdot e \cdot E$, con

α = costante di deformazione

δ = deformazione o braccio di dipolo

Z =numero atomico dell'atomo considerato

e =carica dell'elettrone

E =vettore del campo elettrico

Si definisce frequenza di risonanza dell'oscillazione la relazione:

$$\omega_0^2 = \frac{\alpha}{m},$$

dove m e' la massa dell'atomo

Combinando, la deformazione vale:

$$\delta = \frac{Ze}{m\omega_0^2} \cdot E$$

A questo punto si puo' definire un momento di dipolo per l'atomo pari a:

$$p = Ze\delta = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \cdot E$$

Se gli atomi per unita' di volume sono N , abbiamo finalmente il valore del vettore di polarizzazione:

$$P = N \cdot \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \cdot E.$$

Poiche'

$$D = \epsilon \cdot E = \epsilon_0 \cdot E + P$$

si ottiene:

$$P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \cdot E$$

da cui tenendo conto dell'espressione di P , si ottiene:

$$\epsilon_r = 1 + N \frac{(Ze)^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

Dopo questa introduzione di nuove grandezze elettriche si va a determinare la legge fisica che governa l'oscillazione dei dipoli a causa di un campo em. di frequenza ω

Le forze che intervengono sono quelle conseguenti all'interazione campo elettrico - carica elettrica (coppia protone-elettroni), la forza di richiamo in quanto il dipolo oscilla armonicamente e la resistenza al moto oscillatorio. Il terzo principio della dinamica si scrive come:

$$F = ZeE - m\gamma \frac{d\delta}{dt} - m\omega_0^2\delta = m \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

Infatti la forza di richiamo o forza armonica e' proporzionale allo spostamento dipolare δ , la forza resistente alla velocità, che è la derivata prima dello spostamento e la forza di campo e' data dal campo elettrico per la carica atomica.

Questa equazione differenziale può essere vista nel dominio s di Laplace per $s = i\omega$, ottenendo una "funzione di trasferimento" che lega lo spostamento δ al campo elettrico E, ossia:

$$F(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{E(\omega)} = \frac{Ze}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}$$

Se il campo E e' una sinusoide di frequenza ω , nel dominio della frequenza esso e' rappresentato dal fasore $E_0 \cdot \exp(i\omega t)$, e per questo, passando per l'espressione di $\delta(\omega)$, che si ottiene moltiplicando il campo $E(\omega)$ per la funzione di trasferimento, la polarizzazione e' pari a:

$$P(\omega) = NZe\delta(\omega) = N \cdot \frac{(Ze)^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \cdot E_0$$

Otteniamo quindi l'andamento di ϵ_r con la frequenza:

$$\epsilon_r = 1 + N \cdot \frac{(Ze)^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}$$

E' evidente che l'espressione è complessa, la cui parte reale e' legata all'immagazzinamento dell'energia del campo em., quella immaginaria, invece, rappresenta le perdite per conducibilità del mezzo. Poiché l'indice di rifrazione è

$n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$, formula ricavata dal rapporto di v su c, si può scrivere in conclusione:

$$n = n_r - in_i$$

con

$$n_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{N(Ze)^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$$n_i = \frac{1}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{N(Ze)^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

Sotto sono riportati sotto due grafici, relativi alla parte reale ed immaginaria dell'indice di rifrazione. Come si vede, per la parte immaginaria, che rappresenta il fattore di perdita o di assorbimento dell'onda elettromagnetica che si propaga nel dielettrico, esiste una frequenza di risonanza dove appunto le perdite di energia dell'onda sono massime. Questo significa che ogni materiale o sostanza ha una frequenza caratteristica dove l'energia dell'onda viene massimamente assorbita. Se per esempio consideriamo l'atmosfera terrestre che e' composta da un miscuglio di gas, avremo uno spettro di assorbimento con vari picchi dovuti alla presenza varie sostanze, come si vede in Fig. 3.

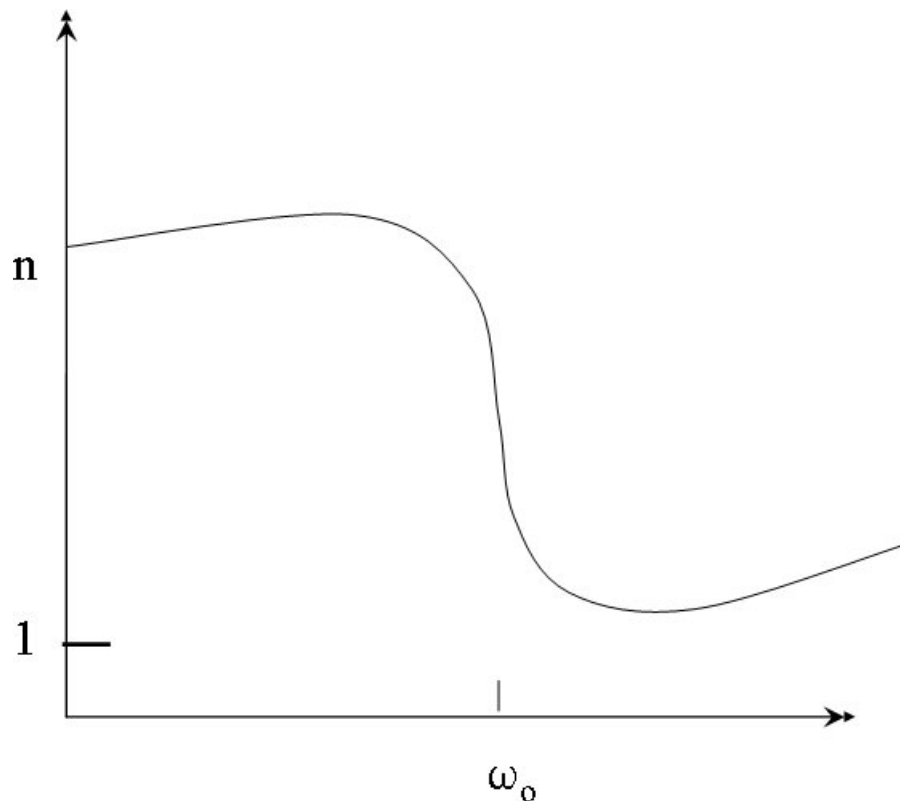


Fig. 1. Parte reale dell'indice di rifrazione n

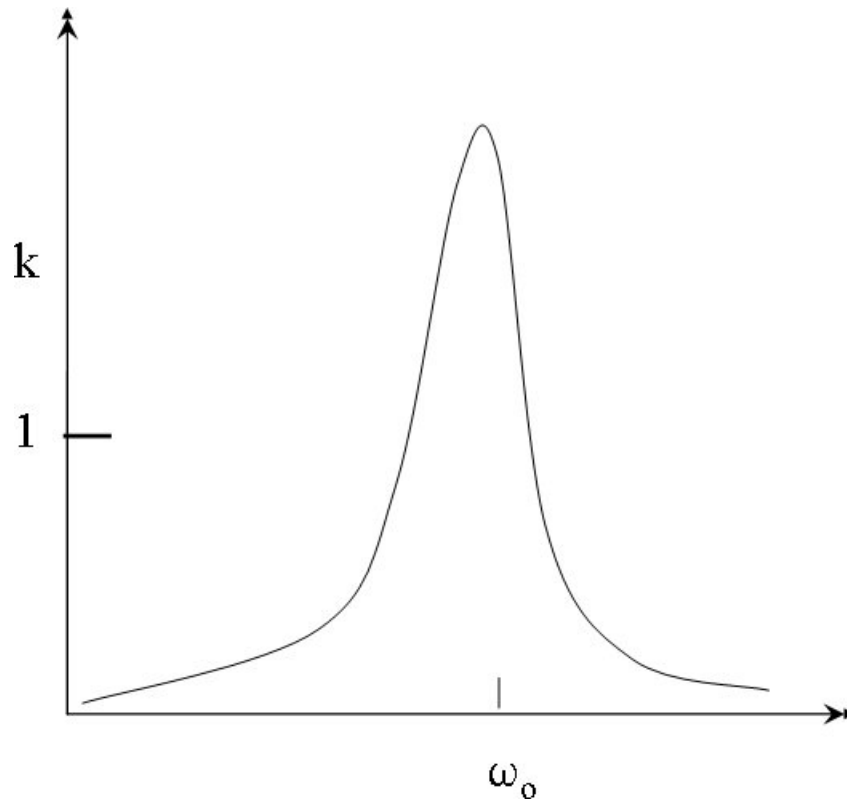


Fig. 2. Parte immaginaria dell'indice di rifrazione n

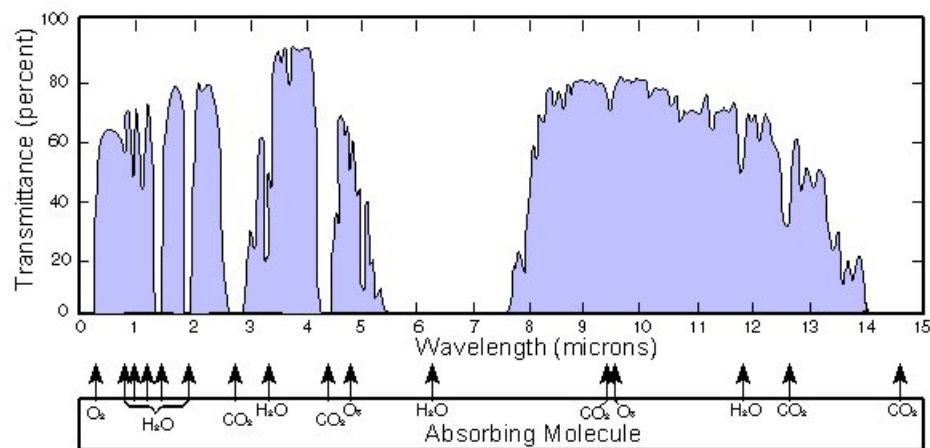


Fig. 3. Spettro di assorbimento correlato all'indice di rifrazione

Un'onda elettromagnetica piana, che si propaga lungo l'asse x , si può scrivere per esempio, nella forma:

$$E = E_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{nx}{c}\right)\right),$$

ma se n ha una parte reale n_r ed una immaginaria n_i , l'espressione muta in:

$$E = E_0 \cdot \exp\left(\frac{-\omega n_i x}{c}\right) \cdot \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{n_r x}{c}\right)\right)$$

Da questa forma si vede in maniera evidente, che la parte immaginaria dell'indice di rifrazione contribuisce alle perdite elettromagnetiche, che consistono nell'assorbimento dell'energia dell'onda.

Fine.

Quest'articolo e' suscettibile di aggiornamenti che possono far vedere il problema sotto altri aspetti matematico-fisici.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Paolo.carlizza:studio-sui-dielettrici>"