

Pietro Baima (PietroBaima)

Integrali per ricorsione: quattro pezzi meno facili

8 September 2025

Questo articolo è la continuazione dell'articolo [Integrali per ricorsione: quattro pezzi facili](#), in cui spiegavo le tecniche per risolvere gli integrali per ricorsione di base.

Come abbiamo visto, per risolvere gli integrali per ricorsione, dobbiamo trovare un modo per scrivere un integrale, che dipende da un parametro n , uguagliandolo ad una qualche funzione sommata allo stesso integrale "scalato" a $n-1$ (o a $n-2$ o a $n-3$ ecc. ...).

In questo modo è possibile applicare ricorsivamente la formula, riducendo di volta in volta l'ordine dell'integrale, fino ad arrivare ad un integrale noto.

Abbiamo risolto, nello scorso articolo, i seguenti integrali, trovando le seguenti formule definite per ricorrenza:

$$\int \log(x)^n \, dx = x \log(x)^n - n \int \log(x)^{n-1} \, dx$$

$$\int \tan(x)^n \, dx = \frac{1}{n-1} \tan(x)^{n-1} - \int \tan(x)^{n-2} \, dx$$

$$\int \sin^n(x) \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) \, dx$$

$$\int \cos^n(x) \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) \, dx$$

La strategia di risoluzione da ricordare, per risolvere questi integrali è:

1. Bisogna cercare una funzione che, derivata, dia la somma di una funzione in n e una funzione in $n-1$ (o $n-k$ in generale), in modo che, integrandola ambo i membri, inneschi la ricorsione. Quasi sempre, quindi, questa funzione è il prodotto di due funzioni, perché, derivandola si ottiene la somma di due funzioni. Anche una funzione composta può assolvere a questo compito.
2. Alcuni testi suggeriscono di procedere utilizzando la regola di integrazione per parti. Non sono un grande fan di questa tecnica perché quasi sempre porta a fare lunghi calcoli che, con un briciolo di attenzione in più, potrebbero essere evitati. Ricordiamoci sempre che lunghi calcoli coincidono con una alta probabilità di fare errori.

3. Se si ha un logaritmo si può usare la funzione $x \log(x)$, poiché la derivata del logaritmo è $1/x$.
4. Se si ha una tangente è quasi sempre sufficiente derivarla da sola, perché la derivata di $\tan(x)$ è $1 + \tan^2(x)$ e la somma è utile per generare i due pezzi della ricorsione.
5. Se si ha un seno o un coseno la funzione da derivare è quasi sempre il prodotto di un seno e di un coseno, perché la derivata diverrà un prodotto di seni e coseni che si potrà riscrivere nella stessa forma della funzione da far ricorrere.
6. Se ci sono degli esponenziali significa che vi piace vincere facile.
icon_mrgreen.gif

Se ci sono delle funzioni composte fra seni, coseni, tangenti, logaritmi conviene dare precedenza ai seni o ai coseni oppure alle tangenti. Se c'è una funzione composta con degli esponenziali la precedenza è loro, sempre.

Queste sono chiaramente delle regole di base, che purtroppo non sostituiscono l'esercizio e l'esperienza.

Chiaramente nessuno dice che la formula debba avere una sola variabile che ricorre.

Per il nostro enorme piacere di studenti ricordo che il professore ci deliziava con simpatiche ricorsioni a due, tre, quattro variabili.

Purtroppo non ho mai scoperto dove parcheggiasse l'auto.

Vediamo a titolo di esempio questo tema d'esame. Ho scelto un tema d'esame non particolarmente difficile da risolvere, però il livello non è più da "pezzi facili", essendo già un esercizio da esame.

Nota: Qualora pensaste che questo esercizio sia difficile, mi dispiace deludervi, ma non avete la minima idea di quanto fossero stro... hem... stroncanti gli esami di Analisi II.

Avevamo un professore molto esigente, che tutti reputavamo un grandissimo, sia nel senso della preparazione sia nel senso dello strafiglio, ma, sebbene all'epoca reputassimo non avesse un cuore, con gli occhi di oggi devo ammettere che sia stato in grado di lasciare ai suoi studenti una grande capacità di analisi dei problemi e quindi non posso che ringraziarlo.

Celeberrima divenne una sua affermazione, quando ci spiegò come conteggiava i punti dell'esame e uno studente alzò timidamente la mano, per dire: "ma così il totale dei punti fa sempre 28". Lui, compassato, rispose: "il 30 lo prenderà chi farà un compito così bello ed elegante che mi farà venire voglia di dare un punto in più ad almeno due degli esercizi svolti. Il 30 e lode sarà di chi mi farà venire voglia di dare un punto in più a tutti gli esercizi svolti".

A quel punto tutto il corso andò a piangere in bagno, con la consapevolezza che non solo nessuno avrebbe mai preso 30 o 30 e lode, ma che sarebbe stato più facile per un cammello passare la cruna di un ago che passare quell'esame.

Indice

- [1 Un tema d'esame di Analisi II](#)
- [2 Una funzione Mathematica per implementare la ricorsione](#)
- [3 Dalla ricorsione alla iterazione](#)
- [4 Cenni sulle funzioni generatrici](#)
- [5 Arriva il sig. Sobolev](#)
- [6 E il polinomio?](#)
- [7 Velocità di esecuzione](#)
- [8 Conclusione](#)
- [9 Bibliografia](#)
 - [9.1 Spazi di Sobolev](#)
 - [9.2 Integrali per ricorrenza \(formule di riduzione\)](#)

Un tema d'esame di Analisi II

Eccolo, in tutto il suo splendore:

[Tema d](#)

Tema d'esame anni 90

Se non dovesse leggersi bene, lo riscrivo qui:

Trovi il candidato una formula definita ricorsivamente per il seguente integrale indefinito [2 punti]

$$\int x^n \cos^m(x) \, dx \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2$$

e poi la espliciti iterativamente [5 punti]

La scrittura $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ è solo un modo sintetico per scrivere che n ed m appartengono entrambi all'insieme dei numeri naturali. E' un po' come quando il professore scrisse in bacheca che gli orali si sarebbero tenuti nelle aule dispari, in questo modo: "gli orali si terranno nelle aule $2n+1$ ". Va beh...

(avrei quasi voluto dirgli che non aveva specificato che n appartiene all'insieme dei numeri naturali e che deve essere $n \leq m$, con m tale che $2m+1$ sia il numero che identifica la più grande aula dispari. Non l'ho fatto perché l'idea di essere bocciato a vita non mi piaceva per nulla.)

Torniamo a noi. Come prima cosa vediamo di portarci a casa 2 punti.

Come dicevo, quando ci sono seni o coseni la funzione da derivare è del tipo cos elevato n moltiplicato sen. Qui c'è anche una x , ma proverei a dare la precedenza alla funzione trigonometrica.

Chiaramente dobbiamo portarci dietro anche il termine in x^n . Proviamo a derivare,

quindi la funzione:

$$x^n \cos^m(x) \sin(x)$$

La procedura è analoga a quanto avevamo fatto in "quattro pezzi facili".

$$\frac{d}{dx} x^n \cos^m(x) \sin(x) =$$

$$n x^{n-1} \cos^m(x) \sin(x) + x^n \left[m \cos^{m-1}(x) (-\sin^2(x)) + \cos^{m+1}(x) \right] =$$

$$n x^{n-1} \cos^m(x) \sin(x) + m x^n \cos^{m-1}(x) (\cos^2(x) - 1) + x^n \cos^{m+1}(x) =$$

$$n x^{n-1} \cos^m(x) \sin(x) - m x^n \cos^{m-1}(x) + (m+1) x^n \cos^{m+1}(x)$$

Adesso integriamo ambo i membri dell'equazione.

$$\int x^n \cos^m(x) \sin(x) dx =$$

$$\int n x^{n-1} \cos^m(x) \sin(x) dx - m \int x^n \cos^{m-1}(x) dx + (m+1) \int x^n \cos^{m+1}(x) dx$$

Ci sono ancora due cose che ci danno fastidio:

1. L'integrale non è in funzione di n, m ma in funzione di $n, m+1$. A questo si rimedia facilmente facendo indietreggiare m di una unità.
2. Abbiamo un integrale nella formula che ci dà fastidio:

$$\int x^{n-1} \cos^m(x) \sin(x) dx$$

Per soddisfare il primo punto riscriviamo la formula ponendo $m+1 \rightarrow m$:

$$\int x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) dx =$$

$$\int n x^{n-1} \cos^{m-1}(x) \sin(x) dx - (m-1) \int x^n \cos^{m-2}(x) dx + m \int x^n \cos^m(x) dx$$

Adesso non resta che esprimere $\int x^{n-1} \cos^{m-1}(x) \sin(x) dx$ in funzione di soli x e $\cos$.

Per farlo possiamo integrarlo per parti (avevo detto di non usare la integrazione per parti per trovare il metodo ricorsivo, ma quando il metodo ricorsivo è stato trovato i vari pezzi sono degli integrali ordinari che è possibile risolvere con un metodo qualunque):

$$\int x^{n-1} \cos^{m-1}(x) \sin(x) dx =$$

$$-\frac{1}{m} x^{n-1} \cos^m(x) + \frac{n-1}{m} \int x^{n-2} \cos^m(x) dx$$

avendo assunto:

$$f(x) = x^{n-1} \quad f'(x) = (n-1)x^{n-2}$$

e

$$g'(x) = \cos^{m-1}(x) \sin(x) \quad g(x) = -\frac{1}{m} \cos^m(x)$$

Riordinando i pezzi e dividendo per m si ottiene:

$$\int x^n \cos^m(x) dx = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) + \frac{n}{m^2} x^{n-1} \cos^m(x) - \frac{n}{m} \int x^{n-2} \cos^m(x) dx$$

ATTENZIONE: avendo diviso per m perdiamo la trattazione di tutti i casi in cui $m=0$. I

casi in cui $m=0$ sono i casi in cui l'integrale è semplicemente l'integrale di x^n , per cui l'integrazione è semplice e non richiede sforzi per trovare una formula ricorsiva.

Quando non si ha solo una variabile conviene fare una tabella, per definire in modo ordinato le condizioni di arresto della ricorsione.

Risolvendo questo tipo di esercizi è fondamentale essere ordinati.

	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$n < 0$	0	0	0
$n = 0$	0	x	RICORRI
$n > 0$	0	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	RICORRI

Dalla tabella si nota che se $m < 0$ oppure $n < 0$ siamo usciti dall'insieme dei numeri interi, per cui è opportuno non ricorrere ulteriormente e restituire il valore zero, in modo da fare arrestare la ricorsione.

Se $m = 0$ abbiamo discusso che l'integrale degenera nell'integrale di x^n e dobbiamo trattarlo a parte. La soluzione è nota e restituendola facciamo in modo che si aggiunga il suo termine e poi la ricorsione si arresta.

Diversamente l'integrale deve ricorrere e, ricorrendo, prima o poi finirà per terminare in una casistica di arresto discussa.

Direi che i nostri due punti li abbiamo portati a casa.

Una funzione Mathematica per implementare la ricorsione

Molto semplicemente basta implementare quanto trovato, con le condizioni di arresto come definite nella tabella:

```
xncosmRec[x_, n_Integer?NonNegative,
m_Integer?NonNegative] := If[m == 0, x^(n + 1)/(n + 1),
1/m*x^n*Cos[x]^(m - 1)*Sin[x] + n/m^2*x^(n - 1)*Cos[x]^m
- n (n - 1)/m^2*xncosmRec[x, n - 2, m] + (m - 1)/m*
xncosmRec[x, n, m - 2]] // ExpandAll
```

Il comando `//ExpandAll` è stato inserito per evitare che Mathematica faccia dei raccoglimenti.

[Prova con \$n=20\$, \$m=5\$](#)

Prova con $n=20$, $m=5$

Come si può vedere ho provato a derivare il risultato dell'integrale e ho ottenuto la primitiva corretta.

Dalla ricorsione alla iterazione

Se osserviamo bene la formula trovata possiamo notare che la ricorsione è divisa fra due integrali, il primo che ricorre diminuendo di due il valore di n e lasciando invariato m :

$$\int x^{n-2} \cos^m(x) dx$$

mentre l'altro ricorre lasciando invariato n e diminuendo m di due.

$$\int x^n \cos^{m-2}(x) dx$$

Si è quindi tentati di pensare che la formula trovata "spezzi" in due l'integrale e che, quindi, si possa studiare in due pezzi separati.

Purtroppo questa è una visione molto ingenua di come avviene la ricorsione in questo integrale, perché bisogna rendersi conto che, quando verrà chiamata la prima ricorsione, questa richiamerà nuovamente la stessa formula (con n diminuito di due se si tratta del primo integrale) che contiene **entrambi** gli integrali e che, pertanto, verranno richiamati entrambi.

La stessa cosa succederà quando la ricorsione chiamerà il secondo integrale, perché questo richiamerà una nuova formula che conterrà **entrambi** gli integrali.

Questo, quando si hanno due o più variabili, capita sempre.

Quando si ha una variabile sola si ottiene una lista, cioè un integrale chiama un altro integrale che chiama un altro integrale finché la corsa non si arresta secondo i criteri stabiliti. Quando si hanno due variabili si ottiene un albero con due rami, che diventano quattro, poi otto, poi sedici e così via fino a quando ogni ramo non termina in una foglia che non genera altri rami perché interviene il criterio di arresto.

Se le variabili fossero tre, ad ogni iterazione si avrebbero tre rami, poi nove, poi ventisette e così via fino all'arresto.

Però questa non è la cosa peggiore che capita. La cosa peggiore che capita, quando si cerca di trovare una formula generale è che i termini della sommatoria di ogni singolo elemento possono essere su rami diversi, che vanno correttamente sommati fra loro.

Vediamo di fare un grafico per chiarire quanto ho detto. All'inizio riporto (n,m) che sono i due valori con i quali inizia la ricorsione. Quando la ricorsione trova il primo integrale richiama la stessa formula con $(n-2,m)$, mentre quando troverà il secondo integrale richiamerà la formula con $(n,m-2)$. Osserviamo quindi cosa capita nel grafico:

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è FidoCad](#)

Ho scritto in rosso, in giallo e in fucsia gli integrali che generano esponenti di x^n e di $\cos^m(x)$ identici e che quindi andranno sommati per trovare il termine generale della somma.

E allora, questo significa che non possiamo separare in due pezzi l'integrale? Ni, nel senso che possiamo farlo, ma nel modo corretto.

Come abbiamo visto ci sono due pezzi, nell'integrale, uno che vede una funzione $x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x)$ e un'altro che vede una funzione $x^{n-1} \cos^m(x)$.

Effettivamente le due funzioni non si moltiplicano mai, solo i coefficienti lo fanno, per cui possiamo spezzare la ricorsione in due, scrivendo un integrale che ricorre solo con la prima funzione e un altro che ricorre solo con la seconda, così:

$$I_{\{n,m\}}(x) = \int x^n \cos^m(x) dx$$

$$I_{\{n,m\}}(x) = I^A_{\{n,m\}}(x) + I^B_{\{n,m\}}(x)$$

dove

$$I^A_{\{n,m\}}(x) = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^A_{\{n-2,m\}}(x) + \frac{m-1}{m} I^A_{\{n,m-2\}}(x)$$

$$I^B_{\{n,m\}}(x) = \frac{n}{m^2} x^{n-1} \cos^m(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^B_{\{n-2,m\}}(x) + \frac{m-1}{m} I^B_{\{n,m-2\}}(x)$$

Basta? No, c'è ancora da considerare il caso $m=0$, quello che genera la soluzione $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Anche in questo caso siamo portati a pensare che il caso è unico, per cui si genererà un solo termine, che si potrà aggiungere alla fine.

Purtroppo anche questo modo di pensare è molto ingenuo.

Per rendercene conto basta dare un'occhiata all'albero di ricorsione che ho disegnato qui sopra.

Supponiamo, per fare un esempio di quanto succede, che m sia uguale a quattro e n uguale a due e disegniamo l'albero.

Verrà fuori qualcosa del genere, dove ho riportato in rosso i vari rami che producono un contributo polinomiale alla soluzione.

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è Fidocad](#)

Come osservazione preliminare possiamo osservare che oltre ai due contributi trigonometrici ci sarà anche un contributo dato da un polinomio, il cui grado sarà $n+1$, con dei coefficienti da determinare che dipendono dai vari rami percorsi dell'albero e che questo polinomio potrà essere presente solo se m è pari.

Il fatto che questo polinomio sarà presente solo se m è pari è dovuto alla forma della ricorsione: o ricorre un ramo in cui m viene riportato così com'è (nel mio albero questo si ottiene scegliendo di andare verso il ramo superiore) e sarà n a diminuire di due unità, per cui l'arresto avverrà solo quando non sarà più vero che n è positivo, non dando contributi polinomiali, oppure, scegliendo il ramo inferiore, sarà m a diminuire di due unità, per cui se m è pari arriverà a zero, contribuendo con un addendo polinomiale, altrimenti ad uno, senza dare contributi polinomiali.

Vediamo cosa succede con un caso in cui m è dispari: si arriva sempre a terminare la ricorsione senza addendi. Per m dispari $I^C_{n,m}(x)=0$

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è Fidocad](#)

Per dividere quindi correttamente la ricorsione dobbiamo considerare non due, ma tre contributi, questi:

$$I_{n,m}(x) = \int x^n \cos^m(x) dx$$

$$I_{n,m}(x) = I^A_{n,m}(x) + I^B_{n,m}(x) + I^C_{n,m}(x)$$

dove

$$I^A_{n,m}(x) = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^A_{n-2,m}(x) + \frac{m-1}{m} I^A_{n,m-2}(x)$$

$$I^B_{n,m}(x) = \frac{n}{m^2} x^{n-1} \cos^m(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^B_{n-2,m}(x) + \frac{m-1}{m} I^B_{n,m-2}(x)$$

$$I^C_{n,m}(x) = -\frac{n(n-1)}{m^2} I^C_{n-2,m}(x) + \frac{m-1}{m} I^C_{n,m-2}(x)$$

$$I^C_{n,m}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{per } m=0$$

Cominciamo, quindi, con ordine, a studiare $I^A_{\{n,m\}}$.

Il metodo per riuscire a risolvere un problema complesso è insito nella abilità del solutore di saperlo studiare pezzettino per pezzettino, in modo da fare ordine.

Vediamo subito come **NON** fare per risolvere il problema. In questi casi si è tentati di scrivere un po' di termini per vedere se si riesce a trarne una formula generale. Tuttavia, praticamente sempre, questi problemi sono troppo complessi per essere risolti in questo modo e vanno spezzettati ulteriormente.

Quello che è consigliabile fare è di dividere il problema seguendo, nei vari rami, tutti i contributi ad un singolo termine.

Mi spiego peggio: la formula risultiva conterrà un certo numero di contributi A, cioè $I^A_{\{x,y\}}$, un certo numero di contributi B cioè $I^B_{\{x,y\}}$ e un certo numero di contributi C cioè $I^C_{\{x,y\}}$.

Iniziamo con i contributi di tipo $I^A_{\{\cdot,\cdot\}}$: questi saranno contributi del tipo $I^A_{\{n,m\}}$, $I^A_{\{n-2,m\}}$, $I^A_{\{n-4,m\}}$...

La seconda riga conterrà invece contributi in $n-2$, del tipo $I^A_{\{n,m-2\}}$, $I^A_{\{n-2,m-2\}}$, $I^A_{\{n-4,m-2\}}$...

La terza riga avrà contributi in $m-4$ e così via discorrendo.

Disegniamo un albero con un po' di rami per cercare di capire come evolve.

[Sorgente FidoCadJ](#) | [Ingrandisci](#) | [Cos'è FidoCad](#)

In rosso ho scritto i pesi dell'integrale, cioè gli argomenti n ed m di $I^A_{\{n,m\}}$ e in verde i coefficienti moltiplicativi, cioè i coefficienti che moltiplicano i vari pezzi ricorsivi.

In pratica, nella formula:

$$I^A_{\{n,m\}}(x) = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^A_{\{n-2,m\}}(x) + \frac{m-1}{m} I^A_{\{n,m-2\}}(x)$$

in rosso ho riportato gli argomenti di $I^A_{\{n-2,m\}}$ quando si va in alto (in pratica sottraggo di volta in volta due ad n) e gli argomenti di $I^A_{\{n,m-2\}}$ quando si va in basso (in pratica sottraggo di volta in volta due ad m).

In verde ho riportato i coefficienti che ci sono davanti a loro, in pratica $\frac{n(n-1)}{m^2}$ quando si va in alto e $\frac{m-1}{m}$ quando si va in basso.

Se il grafico non si vede bene cliccateci sopra per ingrandirlo.

Bene, così il problema è già molto più comprensibile. (frase che diceva sempre il prof. di Analisi II verso metà lezione, provocando un certo riso dolcemente in aula).

Adesso cerchiamo di contare quanti casi troviamo per ogni (n,m) , $(n-2,m)$, $(n-4,m)$... e poi per ogni $(n,m-2)$, $(n-2,m-2)$, $(n-4,m-2)$...

Allo scopo possiamo preparare una tabella. E' chiaro che, in tutto l'albero, ci sarà un solo caso (n,m) : quello della radice dell'albero, perché poi o n calerà di due unità o calerà m di due.

Stessa cosa per $(n-2,m)$ che si potrà ottenere soltanto andando una volta in alto, perché questo sarà l'unico modo per non far calare m.

Stessa cosa per ogni $(n-2i,m)$ che si troveranno solo nel ramo più alto di ogni livello dell'albero, diversamente calerebbe m.

I termini, invece, di $(n-2,m-2)$ dovranno essere due perché se ne otterrà uno andando una volta in alto e poi in basso e un altro andando una volta in basso e poi in alto.

Guardate il grafico e compiliamo la tabella contando i casi:

[Oh, una vecchia conoscenza](#)

Oh, una vecchia conoscenza

Notate nulla? Forse così si vede meglio:

[caro Tartaglia!](#)

caro Tartaglia!

Esatto, sono proprio le diagonali del triangolo di Tartaglia:

[Il triangolo no...non l](#)

Il triangolo no...non l'avevo considerato

In realtà chi se ne intende di calcolo combinatorio lo avrebbe capito subito dal grafico, perché le combinazioni sono quelle di una [permutazione](#) senza rimpiazzo.

Adesso proviamo a scrivere tutti i termini del tipo $(n-2i,m)$.

Sappiamo già che per scriverli dovremo seguire l'albero andando sempre e solo verso l'alto e ad ogni livello dell'albero ci sarà un solo termine.

La radice dell'albero è (n,m) con il solo termine $\frac{1}{m}$

Scrivo così perché nell'albero non ci sarebbero termini verdi da scrivere, essendo la sua radice, ma devo ricordare che il termine dell'integrale è fatto così:

$$I^A_{n,m}(x) = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^A_{n-2,m}(x) + \frac{m-1}{m} I^A_{n,m-2}(x)$$

e di fronte a $x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x)$ c'è $\frac{1}{m}$. Dovrò quindi ricordarmi di moltiplicare per $\frac{1}{m}$ tutti i termini che troverò per ogni $(n-2i,m)$, alla fine.

Passando a $(n-2,m)$ (seguite il disegno dell'albero) dovrò andare in alto, quindi moltiplicare per $\frac{-n(n-1)}{m^2}$ e poi per il solito termine $\frac{1}{m}$.

Passando a $(n-4,m)$ (seguite il disegno dell'albero) dovrò andare in alto e poi in alto, quindi moltiplicare per $\frac{-n(n-1)}{m^2}$ e poi per $\frac{-(n-2)(n-3)}{m^2}$ e poi per il solito termine $\frac{1}{m}$.

Secondo il triangolo di tartaglia ad ogni livello dell'albero troverò solo un termine, che è quello che succede.

Vediamo cosa capita invece con gli $m-2$.

Di $(n, m-2)$ ne dovrò trovare uno, poi di $(n-2, m-2)$ ne dovrò trovare due, poi gli $(n-4, m-2)$ saranno tre eccetera.

Come prima prendiamo l'albero e seguiamo i percorsi. Il primo termine lo otterrò andando in basso, cioè moltiplicando per $\frac{m-1}{m}$. Devo ricordarmi che ho fatto ricorsione una volta, per cui il termine davanti all'integrale:

$I^A_{n,m}(x) = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) - \frac{n(n-1)}{m^2} I^A_{n-2,m}(x) + \frac{m-1}{m} I^A_{n,m-2}(x)$
 non è più $\frac{1}{m}$, ma, dato che ho annidato una volta la ricorsione sarà $\frac{1}{m-2}$ (ogni volta che ricorro scendendo dovrò togliere due, mentre se salgo no.)
 A livello pratico mi basta guardare la casella rossa precedente, per vedere qual è l' m giusto.

Ogni volta che scendo di una riga (diminuisco m di due) dovrò dividere per m diminuito di due: prima $\frac{1}{m}$, poi $\frac{1}{m-2}$, poi $\frac{1}{m-4}$ ecc...

Facciamo quindi una tabella con i vari risultati trovati, per capire come funzioni la ricorsione:

	n	
m	$\frac{1}{m}$	
m-2	$\frac{m-1}{m(m-2)}$	
m-4	$\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$	
m-6	$\frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)}$	$-\frac{n(n-1)}{m}$
m-8	$\frac{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)}{m(m-2)(m-4)(m-6)(m-8)}$	$-\frac{n(n-1)}{m} \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)}$

A questo punto si vede chiaramente che la funzione generale è composta dal prodotto di tre funzioni.

Chiamiamo r l'indice di riga e j l'indice colonna.

r vale 0 per la prima riga, 1 per la seconda, eccetera. Idem per j , l'indice colonna.

La prima funzione è quella che vale 1 nella prima colonna, poi $-n(n-1)$ nella seconda, poi $n(n-1)(n-2)(n-3)$ nella terza, eccetera.

La sua espressione generale è quindi:

$F_j(n) = (-1)^j \frac{n!}{(n-2j)!}$, $\text{quad } j=0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
 $\text{quad } F_j(n) = 0 \text{ se } 2j > n$.

F è semplice perché dipende solo da **j** e non da **r**.

La seconda funzione invece vale $\frac{1}{m}, \frac{1}{m^3}, \frac{1}{m^5}$ ecc... nella prima riga e $\frac{m-1}{m(m-2)}$ per tutta la seconda riga e $\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$ per tutta la terza.

Quale funzione si comporta così? Volete provare a trovarla? Fermatevi qui allora.

Dunque, la prima riga è strana e sarà più chiara dopo, partiamo quindi dalla seconda riga in avanti.

Dalla seconda riga in avanti tutti i termini sulla riga sono uguali, per cui tanto vale cercare di trovare un termine generale valido per la prima colonna, eventualmente escludendo il primo termine.

Il termine generale è quindi

$$P_r(m) = \frac{(m-1)!!}{(m-2r-2)!!} \frac{1}{m!!}, \quad r=0, 1, 2, \dots, \Big\lfloor \frac{m}{2} \Big\rfloor$$

La cosa curiosa è che per $r=0$ $P_r(m)$ vale $1/m$, per cui possiamo lasciarlo così anche per la prima riga (cioè costante a $1/m$) e poi pensare ad una funzione H che per la prima riga valga 1, poi $\frac{1}{m^2}$ poi $\frac{1}{m^4}$... e per la seconda riga valga 1, poi $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2}$ poi $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^2(m-2)^2} + \frac{1}{(m-2)^4}$ eccetera.

La funzione H , osservando la tabella, dipende sia da r che da j , per cui bisogna fare un po' attenzione.

Facciamo una nuova tabella "depurata" dalle altre due funzioni, che abbiamo già individuato, per osservarla da sola.

Sappiamo che il numero di termini che contiene è quello della colonna del triangolo di tartaglia e che deve esprimere delle permutazioni senza rimpiazzo.

	n	n-2
m	1	$\frac{1}{m^2}$
m-2	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} \right]$
m-4	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} \right]$
m-6	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} + \frac{1}{(m-6)^2} \right]$
m-8	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} + \frac{1}{(m-6)^2} + \frac{1}{(m-8)^2} \right]$

Lasciamo perdere la prima colonna, posta tutta ad uno perché non ha termini, le altre ci sembrano ordinate in modo logico.

Analizziamo la seconda colonna: il primo elemento dovrà fare tutte le permutazioni di 2 avendo solo m , quindi l'unica permutazione possibile è m^2 .

Il secondo elemento della seconda colonna dovrà contenere tutte le permutazioni di 2 con m e (m-2), per cui ci sarà solo m^2 oppure $(m-2)^2$.

Il terzo elemento della seconda colonna dovrà contenere tutte le permutazioni di 2 con m (m-2) e (m-4), per cui ci sarà m^2 oppure $(m-2)^2$ oppure $(m-4)^2$.

Il quarto elemento avrà anche (m-6) e il quinto anche (m-8).

Scrivendola come matrice il primo elemento è semplicemente 2, mentre il secondo è

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, il terzo è

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e l'ultimo è

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Passiamo alla terza colonna.

Adesso le permutazioni sono sempre con m, poi con m e (m-2), poi con m e (m-2) e (m-4), poi con m e (m-2) e (m-4) e (m-6) eccetera.

Bisogna quindi trovare le permutazioni di 4 su un termine, poi su due termini, poi su tre eccetera.

Il primo elemento della terza colonna sarà semplicemente 4, perché c'è solo m che genera solo m^4 .

Il secondo elemento della terza colonna sarà dato dalle permutazioni di 4 su m ed (m-2), quindi le combinazioni possono essere tre, cioè (4,0) poi (2,2) poi (0,4) (le ho scritte nello stesso ordine della tabella).

Scrivendo il tutto come matrice si ottiene 4 poi

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, il terzo è

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e il quarto è

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Il tutto è come previsto dal triangolo di Tartaglia.

Notare che ci possono solo essere le varie combinazioni di 2,4,6,8 eccetera. Questo perché la funzione ricorre sempre di due in due, quindi non ci potranno mai essere matrici contenenti numeri dispari.

Il termine generale, quindi, che dipende sia da r che da j può quindi essere riassunto come $H_{\{j,r\}}(m) = \sum_{\substack{\scriptstyle a_0, \dots, a_r \\ \scriptstyle a_0 + \dots + a_r = j}} \prod_{\substack{\scriptstyle t=0 \\ \scriptstyle 2t \neq m}}^r \frac{1}{(m-2t)^{2a_t}}$, quad $j \geq 0, r \geq 0$, quad $H_{\{0,r\}}(m) = 1$.

dove la notazione $a_0 + \dots + a_r = j$ indica che la somma degli esponenti da 0 a r deve sempre fare j, quindi riassume tutte le possibili combinazioni degli esponenti.

Inoltre 2t deve essere diverso da m, perché lì la somma ha un polo. Questo può capitare solo se m è pari e rappresenta qualcosa di cui abbiamo già discusso, cioè la presenza di quel polinomio per il quale, nella ricorsione, abbiamo dovuto aggiungere un ulteriore caso, con la lettera C.

Il modo con il quale abbiamo scritto la somma è però uno stratagemma (che qualche volta comunque si usa) per indicare una funzione senza esplicitarla davvero. Vediamo come possiamo esplicitarla:

$$H_{j,r}(m) = \frac{1}{4^r} \left(\frac{m!!}{(m-2r-2)!!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{\lceil \frac{m-2r-2}{2} \rceil} \frac{1}{(m-2t-2)!!} \left(\frac{m-2t-2}{2} \right)! \cos^{m-2t-2} x \sin x$$

Ma se fossi all'esame non mi farei problemi a lasciare la versione implicita, infatti per trovare quella esplicita ho perso dieci minuti buoni e non ne sono particolarmente contento. Se riuscite a trovare qualcosa di decente scrivetelo nei commenti, grazie. Più oltre vedremo dei metodi più potenti per esprimere somme incasinate.

Adesso abbiamo tutti gli elementi per poter scrivere:

Forma iterativa di $I^A_{n,m}(x)$

$$I^A_{n,m}(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} P_r(m) F_j(n) H_{j,r}(m) x^{n-2j} \cos^{m-2r-1} x \sin x$$

$$\text{con } P_r(m) = \frac{(m-1)!!}{(m-2r-2)!!} \frac{m!!}{(m-2r-1)!!}$$

e

$$H_{j,r}(m) = \frac{1}{4^r} \left(\frac{m!!}{(m-2r-2)!!} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{t=0}^{\lceil \frac{m-2r-2}{2} \rceil} \frac{1}{(m-2t-2)!!} \left(\frac{m-2t-2}{2} \right)! \cos^{m-2t-2} x \sin x$$

$$\text{e infine } F_j(n) = (-1)^j \frac{n!}{(n-2j)!} \quad \text{con } F_j(n) = 0 \quad \text{se } 2j > n.$$

Abbiamo trovato quindi il primo pezzo della soluzione. Dobbiamo trovare gli altri due. In realtà abbiamo già fatto la maggior parte del lavoro, perché con un piccolo ragionamento possiamo evitare di ripartire da capo per trovare le varie funzioni che governano $I^B_{n,m}$.

Osserviamo per un momento la funzione ricorsiva, che ricopio qui per comodità:

$$\frac{d}{dx} x^n \cos^m(x) = n x^{n-1} \cos^m(x) - m x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) + \frac{n}{m} x^n \cos^m(x) - \frac{n}{m} x^{n-1} \cos^{m-1}(x) \sin(x)$$

Il termine ricorsivo che definisce $I^A_{n,m}$ è $\frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x)$ e quindi dobbiamo ricordarci di moltiplicare per $\frac{1}{m}$ i vari elementi dell'albero.

Alla radice avremo $\frac{1}{m}$, al primo livello $\frac{1}{m-2}$ oppure $\frac{1}{m}$, a seconda del ramo scelto (in basso o in alto, rispettivamente) e quindi, in generale avremo un termine $\frac{1}{m-2r}$ che moltiplica il termine, iterativo, della doppia sommatoria $x^{\lfloor \frac{n-2j}{2} \rfloor} \cos^{\lfloor \frac{m-2r-1}{2} \rfloor} x \sin x$

Così ragionando possiamo osservare cosa capita, invece, per il termine ricorsivo che definisce $I^B_{n,m}$, cioè $\frac{n}{m^2} x^{n-1} \cos^m(x)$.

Avremo quindi un termine iterativo $\frac{n-2j}{(m-2r)^2}$ che moltiplica il termine della doppia sommatoria $x^{\lfloor \frac{n-2j-1}{2} \rfloor} \cos^{\lfloor \frac{m-2r}{2} \rfloor} x$ (che è il termine iterativo di $I^B_{n,m}$).

Chiaramente il termine $\frac{1}{m-2r}$ in $I^A_{n,m}$ è stato incluso dentro la funzione $P_r(m)$ (non in $F_j(n)$ perché dipende solo da n e certamente non in $H_{j,r}(m)$ che tiene conto delle permutazioni del grafico), per cui, volendola utilizzare anche per $I^B_{n,m}$ dobbiamo o tenerne conto oppure ridefinirla in modo che quel termine ne resti all'esterno, in modo da poterla utilizzare per entrambi i casi.

E' consigliabile riscriverla depurandola del termine che, abbiamo appurato, riguarda solo $I^A_{n,m}$, per ragioni che saranno chiare fra poco.

Definiamo quindi una nuova funzione:

$$\tilde{P}_r(m) := \frac{(m-1)!! (m-2r)!!}{m!! (m-2r-1)!!}, \quad r \geq 0, m \geq 0,$$

dove:

$$0!! = (-1)!! = 1, \quad r \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

$$\text{Equivalenza con la vecchia } P: \tilde{P}_r(m) = (m-2r)P_r(m)$$

A questo punto possiamo scrivere i termini $I^A_{n,m} + I^B_{n,m}$.

$$I_{n,m}(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \tilde{P}_r(m) F_j(n) H_{j,r}(m) x^{\lfloor \frac{n-2j}{2} \rfloor} \cos^{\lfloor \frac{m-2r-1}{2} \rfloor} x \sin x$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r(m) &= \frac{(m-1)!! (m-2r)!!}{m!! (m-2r-1)!!}, \quad 0!! = (-1)!! = 1, \quad r \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \\ F_j(n) &= (-1)^j \frac{n!}{(n-2j)!}, \quad F_j(n) = 0 \text{ se } 2j > n. \\ H_{j,r}(m) &= \sum_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_j \leq r} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(m-2t_i)^2}, \quad H_{j,r}(m) = 0 \text{ se } 2j > m-2r. \end{aligned}$$

Nota: Faccio finire il termine della sommatoria su r a

$\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ per togliere il caso $r=m/2$ se m è pari.

Fiuu... abbiamo finito? Eh no, manca ancora $I^C_{n,m}$, il polinomio che è presente solo se m è pari!

In realtà, con le definizioni date, abbiamo rimosso i poli dalle funzioni F, P ed H , che

valgono quindi anche se r vale $m/2$. Per cui basta aggiungere un termine extra, la cui dimostrazione (è semplice, tranquilli) la lascio al lettore:

$$\tilde{P}_{\{m/2\}}(m) \displaystyle \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} F_{\{j\}}(n) \cdot H_{\{j, m/2-1\}}(m) \cdot \frac{x^{\{n-2j+1\}}}{\{n-2j+1\}}.$$

Se poi non ci riuscite la aggiungo, però mi aspetto che, arrivati fino a qui, non sia un problema.

A questo punto abbiamo finito l'esercizio. (davvero)

Ci sono però ancora alcune considerazioni più generali che vorrei fare.

Cenni sulle funzioni generatrici

Quando avevo ricavato il termine generale di H avevo detto di non esserne particolarmente soddisfatto.

Dicevo questo perché nessun matematico ricaverebbe mai una funzione generale in quel modo.

Avrete notato certamente che scrivere una funzione nel suo termine generale da sommare, spesso, appare molto complesso, a fronte invece di una tabella generata da quel termine generale più semplice e comprensibile.

Per ovviare a questo problema si preferisce esprimere il termine generale di una somma iterativa tramite una funzione o una serie i cui coefficienti generino i coefficienti di cui abbiamo bisogno.

Chiaramente una serie, per esempio di potenze, oppure una somma, in genere, dipenderà da una variabile x , che poi si potrà fissare ad un valore tale per cui rimarranno solo i coefficienti.

Vediamo meglio questa tecnica applicandola al calcolo della funzione H .

Riporto qui la tabella dei coefficienti di H per comodità:

	n	n-2
m	1	$\frac{1}{m^2}$
m-2	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} \right]$
m-4	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} \right]$
m-6	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} + \frac{1}{(m-6)^2} \right]$
m-8	1	$\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2} + \frac{1}{(m-6)^2} + \frac{1}{(m-8)^2} \right]$

Per ogni riga (fisso r) le voci nelle colonne sono **tutte le somme dei monomi di grado j nelle variabili**

$$a_0 = \frac{1}{m^2}, \quad a_1 = \frac{1}{(m-2)^2}, \quad a_2 = \frac{1}{(m-4)^2}, \quad \dots, \quad a_r = \frac{1}{(m-2r)^2}.$$

In altre parole, l'elemento in riga r e colonna j è

$$T_{r,j} := \sum_{i_0 + \dots + i_r = j} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r}.$$

Osserviamo bene tutte le a e vedremo che ognuna di loro è la somma di una **serie geometrica**.

Definiamo quindi **funzione generatrice ordinaria rispetto alla colonna k** la funzione

$$G_r(x) := \sum_{j \geq 0} T_{r,j} x^j; \\ \prod_{s=0}^r \frac{1}{1 - \frac{x}{(m-2s)^2}}.$$

Per chiarire meglio di cosa stiamo parlando ricaviamo dalla funzione generatrice la prima e la seconda riga della tabella:

Riga 1 ($r = 0$, solo $a_0 = \frac{1}{m^2}$):

$$G_0(x) = \frac{1}{1 - a_0 x} = \sum_{j \geq 0} a_0^j x^j \\ = 1 + \frac{x}{m^2} + \frac{x^2}{m^4} + \frac{x^3}{m^6} + \dots$$

Coefficienti (colonne $j = 0, 1, 2, 3$):

$$1, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^4}, \frac{1}{m^6}; \text{ — la prima riga della tabella.}$$

Riga 2 ($r = 1$, $a_0 = \frac{1}{m^2}$, $a_1 = \frac{1}{(m-2)^2}$):

$$G_1(x) = \frac{1}{(1 - a_0 x)(1 - a_1 x)} = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i=0}^j a_0^i a_1^{j-i} \right) x^j.$$

Coefficienti:

$$[x^0], G_1 = 1, \quad [x^1], G_1 = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-2)^2}, \\ [x^2], G_1 = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^2(m-2)^2} + \frac{1}{(m-2)^4}, \\ [x^3], G_1 = \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^4(m-2)^2} + \frac{1}{m^2(m-2)^4} + \frac{1}{(m-2)^6},$$

che coincidono con la seconda riga della tabella.

Adesso abbiamo bisogno di raggruppare tutte le righe insieme, per cui avremo bisogno di un'altra variabile (con molta fantasia la chiamo y) che moltiplichi ciascuna riga, in modo da poterla selezionare, perché il "coefficiente" di quella riga sarà y^n .

Raggruppando tutte le righe abbiamo quindi:

$$H(x,y) := \sum_{j \geq 0} y^j, G_r(x) := \sum_{j \geq 0} y^j \prod_{s=0}^r \frac{1}{1 - \frac{x}{(m-2s)^2}},$$

Arriva il sig. Sobolev

Il sig. Sobolev, matematico russo, fece delle osservazioni spettacolari su questo modo di esprimere le funzioni generatrici per la risoluzione di integrali per ricorsione.

Come prima cosa osservò che (mi limito all'esempio che abbiamo fatto qui) la funzione H genera uno spazio vettoriale bidimensionale non finitamente generato, la cui base è

$$\begin{pmatrix} y^0 x^0 & y^0 x^1 & y^0 x^2 & y^0 x^3 & \cdots & y^1 x^0 & y^1 x^1 & y^1 x^2 & y^1 x^3 & \cdots & y^2 x^0 & y^2 x^1 & y^2 x^2 & y^2 x^3 & \cdots \end{pmatrix}$$

. Come seconda cosa osservò che la formulazione ricorsiva dell'integrale è:

$$\int x^n \cos^m(x) dx = \frac{1}{m} x^n \cos^{m-1}(x) \sin(x) + \frac{n}{m^2} x^{n-1} \cos^m(x) - \frac{n-1}{m} \int x^{n-2} \cos^m(x) dx$$

mentre quella iterativa è:

$$I_{n,m}(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} S_{j,r} \tilde{P}_r(m) F_j(n) H_{j,r}(m)$$

dove ho definito $S_{j,r} = \tilde{P}_r(m) F_j(n) H_{j,r}(m)$

più un polinomio che viene generato sempre dalle funzioni F, P ed Hm che è questo:

$$\tilde{P}_{m/2}(m) \displaystyle \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} F_j(n) H_{j,m/2-1}(m) \frac{1}{x^{n-2j+1}}$$

Notate nulla?

La forma ricorsiva dell'integrale ha questa forma:

$$I_{n,m}(x) = f_{n,m}(x) + g_{n,m}(x) + k_1 I_{n-2,m}(x) + k_2 I_{n,m-2}(x)$$

e la forma iterativa questa:

$$I_{n,m}(x) = \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} S_{j,r} \left[f_{n-2j,m-2r}(x) + k_2 g_{n-2j,m-2j}(x) \right]$$

Osservate bene: le costanti k1 e k2 della forma ricorsiva sono finite davanti alle funzioni della forma iterativa e le funzioni f e g sono le stesse, solo che sono state scalate degli

indici ricorsivi delle sommatorie.

Sobolev ne concluse che deve esistere uno spazio vettoriale che trasforma (nel nostro caso, le sue osservazioni sono molto più generali) la forma ricorsiva nella forma iterativa e dimostrò che quello spazio è lo spazio dato dalla funzione generatrice.

Questi spazi sono detti spazi di Sobolev e la funzione S è detta nucleo della trasformazione.

Purtroppo Sobolev dimostra che questi spazi sono non finitamente generati e appartengono a spazi distribuzionali e non funzionali, che complica non di poco la loro gestione.

Per gestirli correttamente servono i gruppi di Lie.

Vi ricordate quando all'inizio avevamo scritto l'integrale come delle derivate e poi le avevamo riorganizzate per ottenere la formula ricorsiva?

Bene, questo si può fare anche con le equazioni differenziali, quindi gli spazi di Sobolev sono utili per risolvere equazioni differenziali, specialmente quando si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali (si può dimostrare che un integrale come quello da noi risolto, in due variabili, corrisponde ad una equazione differenziale alle derivate parziali in due variabili). Voi non lo sapete (forse, probabilmente alcuni di voi lo sanno, ma noi no, all'esame) ma quell'integrale risolve un oscillatore armonico in due dimensioni.

Sobolev ha poi trovato dei metodi per trovare quegli spazi vettoriali partendo dall'equazione differenziale. Vi risparmio la teoria perché ho paura che, altrimenti, l'articolo diventi un po' difficile.

E il polinomio?

Si può dimostrare che quel polinomio approssima la derivata debole del nucleo di Sobolev.

Chi conosce bene la teoria delle distribuzioni avrà sentito parlare del concetto di derivata debole.

Per chi non ne ha sentito parlare, mi è impossibile spiegare qui la teoria delle distribuzioni, ma quello che posso dire è che una derivata debole è una derivata generalizzata a funzioni non differenziabili, ma solamente integrabili.

Quando la funzione che si vuole derivare è differenziabile la derivata debole e la derivata ordinaria coincidono.

Quando la funzione è invece non differenziabile le due derivate differiscono nei punti di non differenziabilità, ma in un modo tale per cui esista comunque l'integrale di Lebesgue della primitiva.

Quel polinomio, e vi ometto la teoria, può essere utilizzato per approssimare una funzione tramite il ker di Sobolev corrispondente.

In pratica gli spazi di Sobolev racchiudono tutte le possibili trasformate integrali: sono una generalizzazione di Fourier, Laplace, trasformata z , DCT e qualunque altra trasformazione integrale possa venirvi in mente per approssimare funzioni di qualunque tipo.

I polinomi di Tchebyshev, per esempio, si possono ricavare direttamente da un opportuno nucleo di Sobolev.

Vediamo la potenza del coseno, cioè i Chebyshev di I specie:

Per $p \in \mathbb{N}$ (con T_n Chebyshev di I specie, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$), valgono:

$$\begin{aligned} \text{Se } p=2h: \quad \cos^{2h} x &= \frac{1}{2^{2h}} \left[\binom{2h}{h} + 2 \sum_{k=0}^{h-1} \binom{2h}{k} T_{2h-2k}(x) \right] \\ \text{Se } p=2h+1: \quad \cos^{2h+1} x &= \frac{1}{2^{2h+1}} \left[2 \sum_{k=0}^h \binom{2h+1}{k} T_{2h+1-2k}(x) \right] \end{aligned}$$

Quindi qualunque termine del ramo “cos”, $x^{n-2j-1} \cos^{m-2r} x$, è una **combinazione finita** di $x^{n-2j-1} T_k(\cos x)$ (equivalentemente: di $\cos(kx)$).

Questo non può non ricordarvi un nucleo di Sobolev, facendo il confronto con l'esempio che abbiamo fatto.

Per $q \in \mathbb{N}$ (con U_ℓ Chebyshev di II specie e $\sin((\ell+1)x) = \sin x U_\ell(\cos x)$)

$$\sin x, \cos^q x = \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \sin \big((q+1-2k)x\big) = \sin x \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \cos^{q-2k} x$$

dove

$$c_{\ell} = \begin{cases} 2^{-q} \binom{q}{\ell} \frac{q-\ell}{2}, & \text{se } q \equiv \ell \pmod{2} \\ 0, & \text{se } q \not\equiv \ell \pmod{2} \end{cases}$$

Di conseguenza ogni termine del ramo “sin”, $x^{n-2j} \cos^{m-2r-1} x \sin x$, si scrive come **somma finita** di $\sin((\ell+1)x)$ (oppure $\sin x U_\ell(\cos x)$).

La parte trigonometrica è quindi una **serie di Fourier finita**. In linguaggio polinomiale, è una combinazione di $T_k(\cos x)$ (ramo cos) e di $\sin x U_\ell(\cos x)$ (ramo sin).

Il nucleo di Sobolev $S_{j,r}(n,m) = \tilde{P}_r(m) F_j(n) H_{j,r}(m)$ sono i **coefficienti polinomiali in x** che pesano tali blocchi di Chebyshev.

E questa è solo una possibile applicazione degli spazi di Sobolev!

Velocità di esecuzione

Un altro aspetto, più legato alla ottimizzazione degli algoritmi di calcolo, è che la versione iterativa, rispetto alla ricorsiva, è molto più efficiente.

Ho scritto un semplice benchmark in mathematica per misurare i tempi di esecuzione della versione ricorsiva e di quella iterativa, i cui risultati sono riportati in tabella e nel grafico:

Velocità di esecuzione

Velocità di esecuzione

Guardando il grafico dovrete rendervi conto di un fatto notevole: nel caso $(n,m)=(18,18)$ l'algoritmo iterativo è 72 volte più efficiente della rispettiva versione ricorsiva. Questo è veramente notevole.

Ho inserito anche una colonna "check" per controllare che la versione iterativa e quella ricorsiva producessero lo stesso risultato, in modo da controllare la correttezza di quanto prodotto finora.

Potreste obiettare (a ragione!) che la versione iterativa è però molto più complicata da ricavare rispetto a quella ricorsiva: questo capita sempre quando il mio obiettivo diventa il voler aumentare l'efficienza di un algoritmo. Maggiore è l'efficienza a cui miro, esponenzialmente maggiore diventa la complicazione necessaria per ottenerla.

Conclusione

Mi rendo conto di non essere stato in grado di offrire una panoramica esaustiva sugli integrali per ricorsione, perché manca tutta una parte di integrazione per ricorsione di integrali doppi e tripli, dove i nuclei di Sobolev diventano non più matriciali, ma tensoriali.

Come sempre faccio quando scrivo un articolo, mi scrivo degli appunti su come impostarlo e su come risolvere i problemi che pongo, in modo da soffermarmi di più su quei passaggi che reputo più complessi e meno comprensibili. Scrivendo quegli appunti mi sono reso conto che questi integrali esulano da un articolo di media difficoltà come questo: avrei dovuto scrivere un nuovo articolo chiamato: "integrali per ricorsione, quattro pezzi difficili.", ma non è saltando da un livello semplice, come voleva essere l'articolo precedente, ad un livello complesso che posso sperare di rendermi comprensibile.

Inoltre le nozioni che ho riportato sugli spazi di Sobolev sono volutamente frammentarie e ridotte al minimo e solo sul caso che ho preso in analisi, perché non posso spiegarne la teoria in un semplice articolo, essendo materia accessibile solo facendo un corso di analisi superiore e dedicandoci una congrua quantità di tempo.

Tuttavia ho voluto fare degli accenni e riportare dei testi esaustivi in bibliografia, in modo tale per cui, chi fosse interessato, possa avere un riferimento su un argomento, non semplicissimo, che però è certamente molto potente per l'analisi funzionale.

Se qualcuno volesse studiarli e avesse bisogno di aiuto, oppure volesse qualche chiarimento o approfondimento su questo articolo, sono naturalmente disponibile sul forum (finché lo so, dopo possiamo cercare di capire insieme...).

Infine volevo ringraziare molto Boiler e IsidoroKZ che mi hanno spronato a scrivere l'articolo.

Senza di loro mi sarebbe mancata la motivazione alla sua stesura. Un grande grazie.

Bibliografia

Spazi di Sobolev

- **R. A. Adams, J. J. F. Fournier**, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, 2003. — Classico completo e rigoroso. Duro da affrontare
- **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (Universitext), 2011. — Ottimo testo ponte tra analisi funzionale e PDE.
- **G. Leoni**, *A First Course in Sobolev Spaces*, 2nd ed., AMS (GSM 181), 2017. — Introduzione moderna e molto leggibile.
- **L. C. Evans**, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS (GSM 19), 2010. — Capitoli su Sobolev e applicazioni alle PDE.

Integrali per ricorrenza (formule di riduzione)

- **G. Boros, V. H. Moll**, *Irresistible Integrals*, Cambridge University Press, 2004. — Tantissimi esempi con ricorrenze e tecniche miste.
- **I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik**, *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th ed., Academic Press, 2014 (rev. D. Zwillinger, V. Moll). — Tavole e formule di riduzione di riferimento.
- **G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris**, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed., Elsevier, 2012. — Sezione sui metodi d'integrazione con varie riduzioni classiche.
- **E. Kreyszig**, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed., Wiley, 2011. — Panoramica pratica; include esempi di formule di riduzione. Tostissimo.
- **Pietro Baima**, [integrali per ricorsione: quattro pezzi facili](https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Pietrobaima:integrali-per-ricorsione-quattro-pezzi-meno-facili-2), EY edizioni. — Primo articolo su questa tematica

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Pietrobaima:integrali-per-ricorsione-quattro-pezzi-meno-facili-2>"