



Pietro Baima (PietroBaima)

REGULA FALSI PER CIRCUITI CON PIÙ GENERATORI

12 January 2018

Sommario

Il metodo descritto in questo articolo estende il metodo della **regula falsi** applicato alle reti elettriche, ad un solo generatore, per reti elettriche a più generatori.

La *regula falsi* è un metodo che gli antichi (arabi, egizi, cinesi) utilizzavano per risolvere equazioni di primo grado, del tipo $Ax=B$.

Con le conoscenze matematiche di oggi un problema del genere farebbe sghignazzare chiunque, ma, se vi dimenticate dell'algebra che conoscete, delle equazioni e di tutta la matematica, con l'aiuto del semplice ragionamento, riuscireste a risolverlo?

Proviamoci!

Un esempio potete trovarlo in [4], magistralmente illustrato da [RenzoDE](#), che riporto qui per comodità:

"se con un tubo più un quarto di tubo riesco a fare i 15 metri del giro del bagno, quanto lungo sarà 'il tubo' base che ho usato?"

Come fareste senz'algebra? Gli egizi conoscevano a malapena le frazioni...

... ma hanno costruito le piramidi, direbbe qualcuno.

Allora, ci siete riusciti? Ottimo! Ma, alla fine, gli egizi, come facevano?

Gli egizi facevano una ipotesi di soluzione [3]: per esempio, supponevano che il tubo potesse essere lungo 4 m. Un tubo più un suo quarto fa quindi 5m. Hmm... non è giusto, ma 5 m è un terzo di 15 m, ho quindi coperto un terzo del bagno. Quindi il tubo dovrà essere lungo 3 volte tanto, quindi 12m. Funziona? Verifichiamo: 12 m più un suo quarto fa proprio 15m. Ottimo!

La mia ipotesi non è stata tirata completamente a caso, ho infatti scelto 4 m, che è un numero comodo a cui sommare un suo quarto.

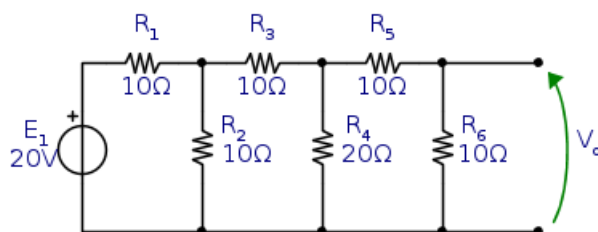
Non avrei mai detto che avrei cominciato a interessarmi di egittologia...

Regola falsi applicata alle reti elettriche

Gli egizi e gli antichi cinesi non conoscevano le reti elettriche (e a giudicare dall'ultimo alimentatore stabilizzato che ho comprato direi che nemmeno i cinesi moderni le conoscano, ma lasciamo stare) però notate il bello della matematica: il pensiero astratto e le buone idee matematiche attraversano i millenni e, quando qualcuno trova il modo di applicarle per risolvere problemi moderni, come ha fatto [RenzoDF](#), ne nasce qualcosa di straordinariamente bello e intrigante.

Un teorema è per sempre [De Fermat]

Prendiamo una rete elettrica noiosa da risolvere:



Si richiede di trovare la tensione di uscita. Il problema di per sé non è per nulla complicato, è solo un po' noioso, con i metodi usuali.

La tensione di uscita, possiamo però osservare, è funzione lineare di E_1 , in pratica $V_o = \gamma E_1$ e il problema richiede di trovare gamma, ispezionando la rete, per poi scrivere V_o .

Ciò che dobbiamo trovare è, a tutti gli effetti, x , nell'equazione $b = x a$. Per risolverlo in modo idraulicamente egizio possiamo supporre di conoscere b , cioè l'uscita del problema (nel nostro circuito V_o) e poi trovare quale sia quel valore dell'ingresso a (il nostro generatore di tensione E_1) che renda vera l'equazione. A questo punto abbiamo x , che otteniamo facilmente dividendo b per a , (cioè, nel nostro circuito, gamma, che otteniamo dividendo V_o che abbiamo imposto per E_1 che abbiamo trovato). Avendo gamma non resta che moltiplicarlo per E_1 "vero", cioè quello presente davvero nel circuito, per avere la soluzione.

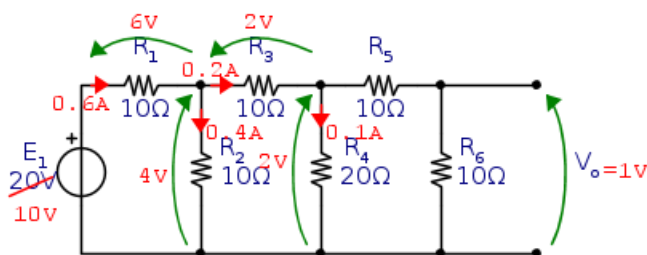
$$\text{Vediamo di scriverlo in formule: } V_{o.vero} = \frac{V_{o.falso}}{E_{1.falso}} \cdot E_{1.vero}$$

Se vi piacciono le proporzioni, potete scriverlo come $\frac{V_{o.vero}}{E_{1.vero}} = \frac{V_{o.falso}}{E_{1.falso}}$ che assume l'aria di qualcosa di estremamente logico per un sistema lineare: La tensione di uscita veramente presente all'uscita sta al generatore posto veramente al suo ingresso come la tensione di uscita imposta da noi sta ad un altro generatore (che abbiamo calcolato).

Abbiamo il metodo! Scegliamo una tensione di uscita qualunque, meglio se comoda rispetto ai valori numerici della rete.

Scelgo $V_o=1V$. Se su R_6 c'è 1V, su R_4 ci saranno 2V, poichè R_5 e R_6 sono uguali. In R_3 scorrono quindi 0.2 A e su R_2 sono presenti 4 V e scorrono 0.4 A. In R_1 scorrono quindi 0.6 A, cadono 6 V e quindi E_1 deve valere 10 V.

Si fra prima a farlo che a dirlo, così:



Adesso la tensione di uscita falsa (imposta da noi) è 1 V e abbiamo trovato che il generatore che impone quella tensione all'uscita deve valere 10 V. Quanto varrà quindi l'uscita con un generatore pari a 20 V? Ovviamente il doppio, cioè 2V, direbbe Ahmes.

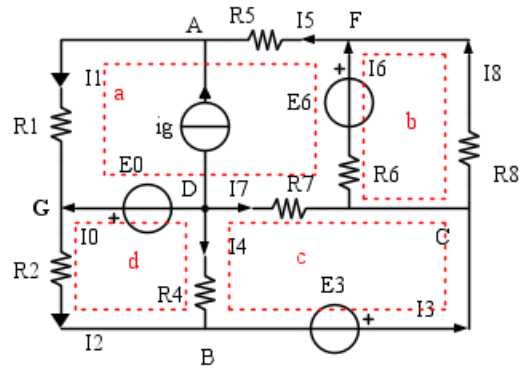
V_o vera sta a Generatore vero come V_o falsa sta a Generatore falso $\rightarrow V_o:20\text{ V} = 1\text{ V} : 10\text{ V}$, cioè $V_o = 2\text{ V}$

Il metodo è stato ampiamente utilizzato sul forum per risolvere le reti più svariate, cercando troverete moltissimi esempi, è stato persino risolto un circuito magnetico con tale metodo, che troverete in [5] (Renzo chiama k quel che io ho chiamato γ).

Il problema di questo metodo è che consente la soluzione di reti che abbiano un solo generatore.

Estendiamo il metodo

Qualche sera fa stavo leggendo [questo](#) articolo di [admin](#) e stavo ragionando su questo circuito:



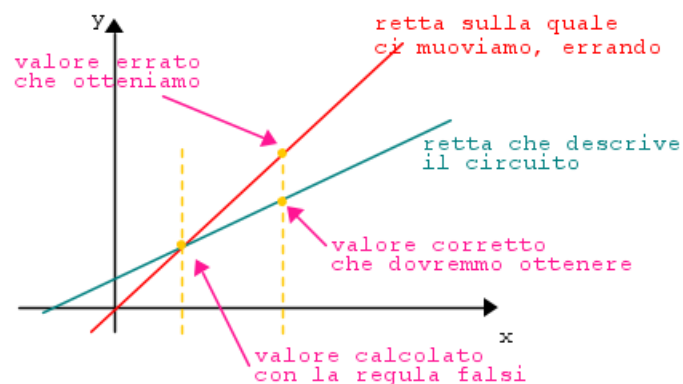
Il circuito non è semplicissimo da risolvere senza effettuare qualche manipolazione, quindi mi chiedevo se fosse possibile risolverlo con la regola falsi. Come ho accennato prima, però, il circuito ha più generatori, quindi la regola falsi non è direttamente applicabile, andrebbe trovata una sua estensione...

Come scrivevo in [1], la regola falsi non fa altro che descrivere una retta in x , che quindi descrive tutte le possibili uscite in funzione di tutti i possibili ingressi, che il risolutore della rete particularizza in un punto specifico, dato dal particolare generatore imposto alla rete.

Questa retta passa certamente per zero, poichè, essendoci un solo generatore, se l'uscita è nulla l'unica possibilità è che il generatore che eccita la rete sia anch'esso nullo. La retta passa quindi per $(0,0)$, l'origine.

Se sono presenti altri generatori, oltre quello che intendiamo far variare imponendo una qualche uscita numericamente conveniente, ci troviamo a dover risolvere un problema lineare affine, perchè la retta, anche ponendo l'uscita a zero, non passerà più per l'origine.

Se procediamo come prima quello che succede è che calcoliamo un punto su una retta che non passa per l'origine, per poi ricalcolare un punto in una nuova retta (diversa da quella di prima) che invece passa per l'origine. Il risultato sarà ovviamente errato.



Ragionando così ho quindi tratto la semplice conclusione che per applicare la regola falsi con più di un generatore bisognerà prendere due punti per descrivere la retta (prima assumevamo implicitamente che il primo punto fosse zero).

Vediamo di generalizzare.

Questa volta non abbiamo più una espressione del tipo $G = \beta \cdot x$, ma una espressione del tipo $G = \beta \cdot x + \sum_{n=0}^m \alpha_n \cdot G_n$ dove $\sum_{n=0}^m \alpha_n \cdot G_n$ è il termine che tiene conto di tutti gli altri generatori presenti nella rete.

Se io isolo un generatore in particolare, da una rete, quando lo spengo, ottengo una tensione di uscita che terrà conto unicamente del contributo di tutti gli altri per il fattore di partizione che la rete introdurrà alla loro variabile indipendente.

Facendo variare poi il generatore che avevo prima spento, otterrò di muovermi su una retta.

La conclusione è che non è importante **quanti** generatori, oltre a quello scelto sul quale applicare la regola falsi, siano presenti nella rete, ma è importante considerarli lasciando un termine che li comprenda tutti.

Posso quindi riscrivere $G = \beta \cdot x + \sum_{n=0}^m \alpha_n \cdot G_n$ come $G = \beta \cdot x + G_0$ dove G_0 è un termine equivalente a tutti gli **altri** generatori, già riscaldati per il fattore che introduce su di loro la rete.

Se ho bisogno di due punti per caratterizzare la mia retta dovrò fare due false ipotesi, che chiamo x_A e x_B , dalle quali otterrò due generatori falsi, che chiamerò G_A e G_B .

G è invece il generatore vero, quello che è veramente presente nella rete.

$$\text{Ho quindi che: } \begin{cases} G_A = \beta \cdot x_A + G_0 \\ G_B = \beta \cdot x_B + G_0 \end{cases}$$

mentre la rete risponde alla retta vera $G = \beta \cdot x + G_0$.

Il trucco ora consiste nello scrivere le tre equazioni come proporzione.

$$\text{Ricavo } x \text{ dalla retta vera: } x = \frac{G - G_0}{\beta}$$

moltiplico numeratore e denominatore per $x_A - x_B$

$$x = \frac{G(x_A - x_B) - G_0(x_A - x_B)}{\beta(x_A - x_B)}$$

e espando

$$\beta x x_A - \beta x x_B = G x_A - G x_B - x_A G_0 + x_B G_0$$

La vedete anche voi la proporzione ora? No? Basta raccogliere $x - x_A$ e $x - x_B$ in modo creativo



$$(x - x_A)(G - \beta x_B - G_0) = (x - x_B)(G - \beta x_A - G_0)$$

adesso mi ricordo anche delle due equazioni

$$\begin{cases} G_A = \beta \cdot x_A + G_0 \\ G_B = \beta \cdot x_B + G_0 \end{cases}$$

e riscrivo come:

$$(x - x_A)(G - G_B) = (x - x_B)(G - G_A)$$

o anche

$$\frac{x - x_A}{G - G_A} = \frac{x - x_B}{G - G_B}$$

o se volete vederla con la notazione propria delle proporzioni:

$$x - x_A : G - G_A = x - x_B : G - G_B$$

E' una cosa estremamente semplice da applicare: faccio una ipotesi sull'uscita e calcolo quanto vale un generatore che mi scelgo, poi ne faccio una seconda (distante a sufficienza dalla prima) e calcolo di nuovo quanto dovrebbe valere lo stesso generatore di prima e poi recito la proporzione:

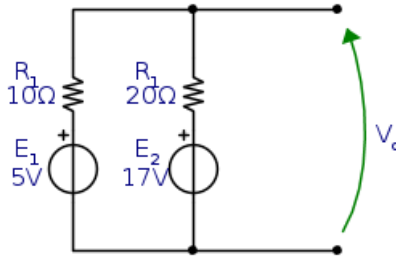
La differenza fra l'incognita e il primo valore che ho imposto sta alla differenza fra il generatore vero e il valore che ho trovato per primo come la differenza fra l'incognita e il secondo valore che ho imposto sta alla differenza fra il generatore vero e il valore che ho trovato per secondo.

Il metodo che ho descritto assomiglia al metodo della doppia falsa posizione o elchataym, portato in europa da Fibonacci [2]. Chi volesse approfondire può leggere il bel libro [6]. La lettura è scorrevole e l'ho trovato molto interessante, fra ieri e oggi l'ho finito!

Facciamo ora qualche esempio per illustrare il metodo, diverso da quanto ho già riportato nel thread [1].

Esempio 1: Applicazione pedissequa del metodo

Troviamo V_o dalla rete:

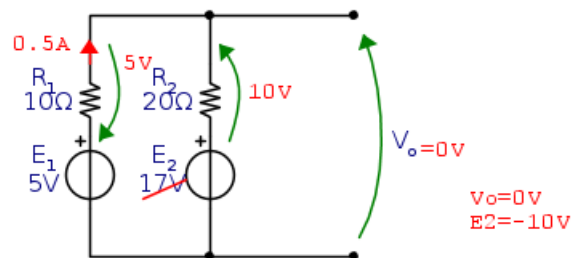


Scelgo di variare E_2 , che ha un valore antipatico per i calcoli. Devo ora imporre una tensione di uscita per trovare quale valore di E_2 la realizza.

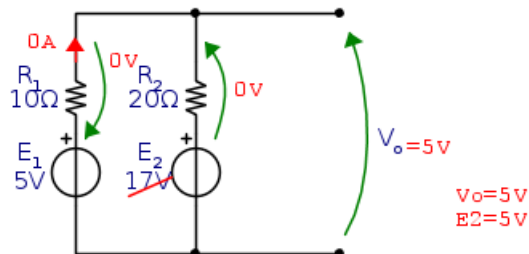
Nessuno mi vieta di scegliere una tensione di uscita nulla (con un solo generatore non lo posso fare), ormai, quindi questa è proprio la prima scelta che faccio.

Impongo $V_o = 0V$

Se la tensione V_o è nulla, allora la tensione su R_1 deve essere pari a E_1 , invertita di segno, per cui la corrente circolante nella maglia è $0.5A$ e la caduta su R_2 è quindi pari a $10V$, per cui anche E_2 deve valere $10V$, invertita di segno, per avere $V_o = 0V$.



Come seconda scelta, imposto $V_o = 5V$, perchè se faccio così la tensione su R_1 dovrà essere nulla e la corrente che scorre nella maglia sarà altrettanto nulla. Questo significa che E_2 deve valere $5V$.



Ora imposto la proporzione:

$$\frac{V_o - 0}{17 - (-10)} = \frac{V_o - 5}{17 - 5}$$

da cui immediatamente **$V_o = 9V$** .

Considerazione

Nel circuito appena risolto, nel primo in cui ho applicato la doppia regola falsi, ho scelto $V_o = 0V$ per avere un vantaggio risolutivo. Nel secondo ho scelto $V_o = 5V$ per avere un caso diverso ma altrettanto vantaggioso, sapendo che avrei poi trovato che la tensione ai capi di R_1 sarebbe stata nulla. Tanto valeva imporre immediatamente $V_{R1} = 0V$ e calcolare V_o .

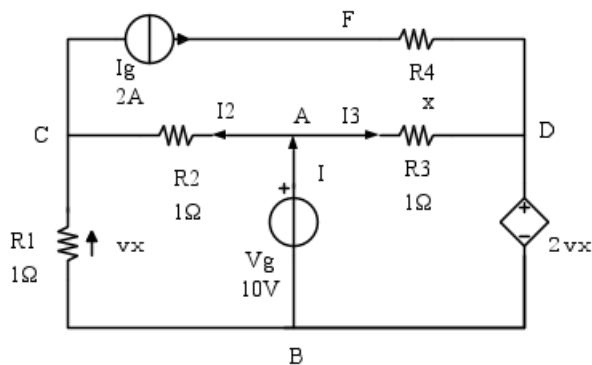
A ben pensarci, essendo la rete lineare, posso imporre **qualunque** tensione o corrente pari al valore che mi fa comodo (una sola però, ovviamente), sarà poi sufficiente calcolare la tensione che mi interessa e calcolare la tensione del generatore che ho scelto di variare. Questo potrebbe risultare più comodo e darmi ulteriore libertà, per sveltire ulteriormente la risoluzione della rete.



Per trovare la soluzione del prossimo circuito viene sfruttata questa considerazione.

Esempio 2: Il circuito risolto da [carloc](#)

Mi riferisco al secondo circuito dell'articolo sullo spostamento dei generatori, di cui ho già parlato poco fa, di [admin](#), e in particolare al secondo esempio, [questo](#):



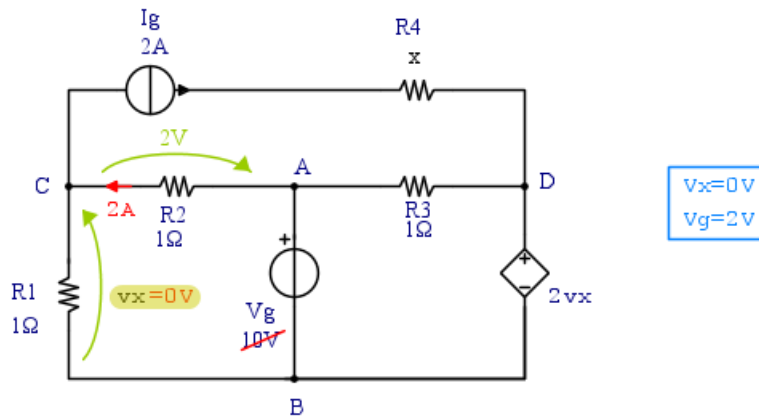
In questo circuito viene richiesto di calcolare la potenza erogata dal generatore indipendente di corrente e dal generatore indipendente di tensione.

Attenzione: La potenza, essendo pari al prodotto di due variabili da determinarsi, **non** è lineare, quindi non si può applicare direttamente il metodo della doppia regola falsi.

Nessuno però ci vieta di valutare la **tensione ai capi del generatore di corrente** e la **corrente erogata dal generatore di tensione**, con doppia la regola falsi, e poi moltiplicarle per le rispettive grandezze.

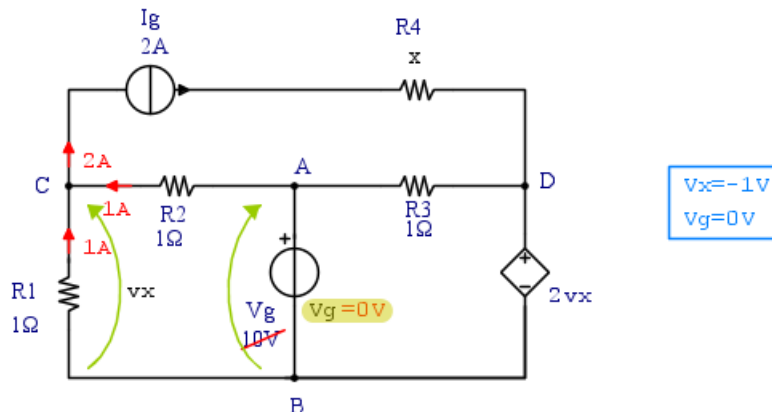
Scelgo, come generatore target, V_g , volendo calcolare v_x , perchè, una volta nota v_x mi sarà immediato calcolare la corrente erogata da V_g e la tensione ai capi di I_g (per ispezione).

Come prima tensione falsa scelgo $V_x=0V$. La rete diventa:



Da cui è veramente banale tirare fuori i valori che ho riportato nel rettangolo azzurro.

Come seconda rete scelgo di annullare V_g (posso scegliere una tensione qualunque, quindi anche V_g). Nuovamente la rete diventa molto semplice:



R_1 finisce per essere in parallelo ad R_2 ed, essendo fra loro uguali, la corrente assorbita da I_g si divide anch'essa in due parti uguali.

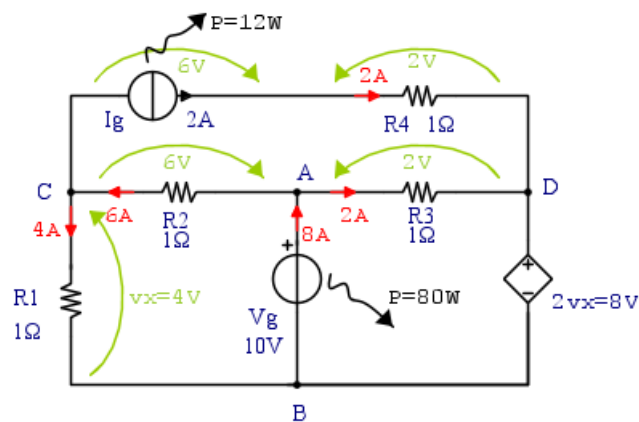
A questo punto posso impostare la proporzione:

$$\frac{V_x - 0}{10 - 2} = \frac{V_x - (-1)}{10 - 0}$$

da cui immediatamente $V_x = 4V$.

A questo punto, conoscendo V_x , posso scrivere tensioni e correnti sulla rete, poi posso fare i prodotti e calcolare le potenze.

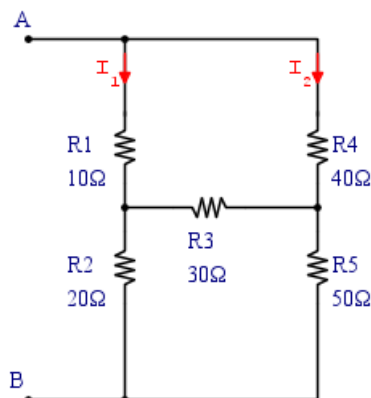
A tal proposito, poichè il valore di R_4 non era indicato (e per calcolare tensioni e correnti non serve) ho assunto fosse pari a 1Ω . Se così non fosse bisognerebbe ricalcolare la tensione su R_4 e la tensione su I_g .



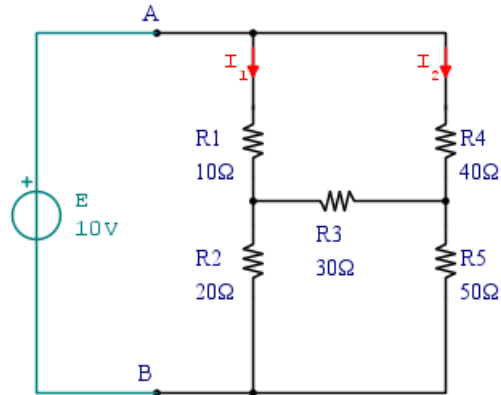
Esempio 3: Calcolo di una resistenza equivalente

Nessuno vieta di usare il metodo per calcolare la resistenza equivalente di un circuito.

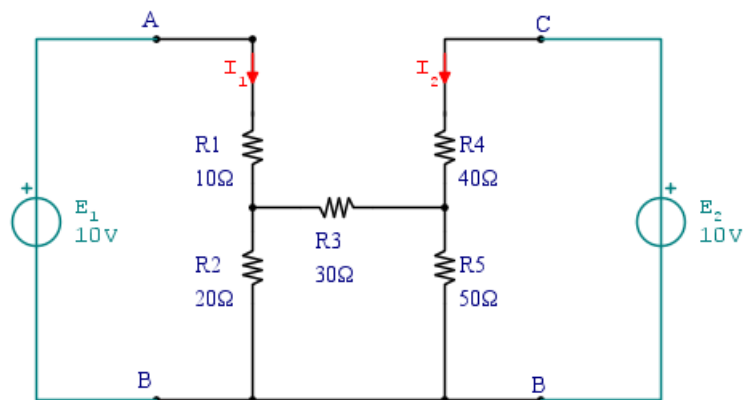
Si vuole valutare la R_{eq} fra i punti A e B della rete seguente:



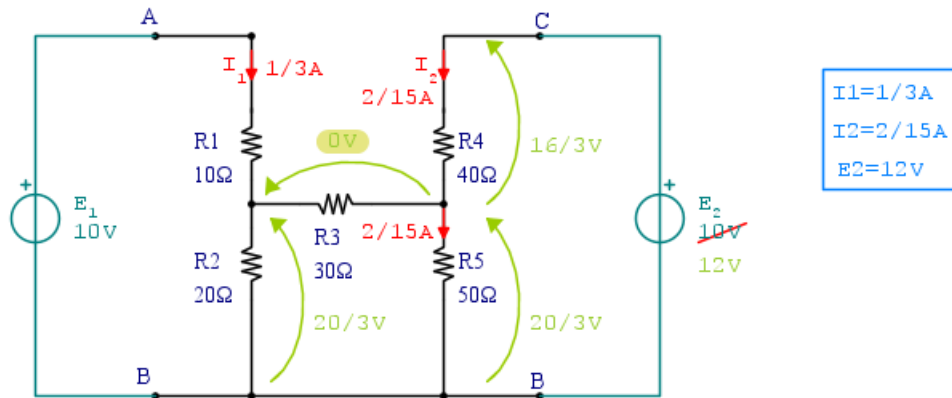
Per valutare la resistenza equivalente applico ai morsetti AB un generatore di tensione pari a 10V e valuto la corrente che la rete assorbe, la quale, come ho disegnato, si divide in I_1 e I_2 .



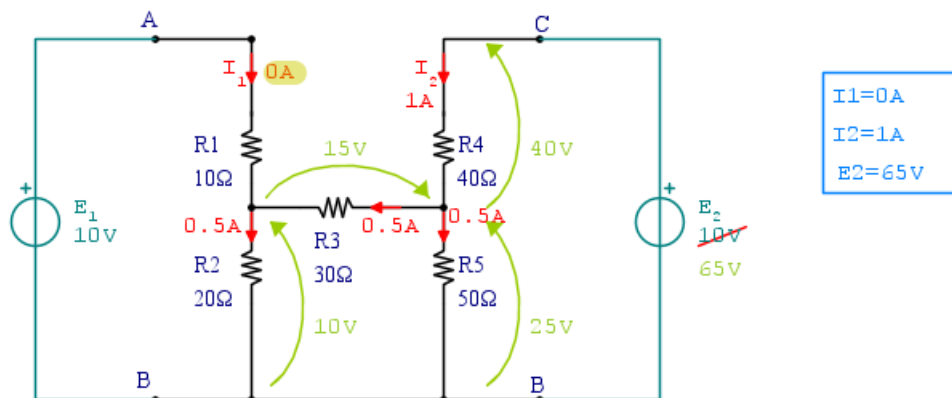
Duplico quindi l'unico generatore E in due generatori E_1 e E_2 , che applico ai lati del ponte di Wheatstone.



Scelgo come target E_2 e nella prima rete impongo $V_{R3}=0V$.



Nella seconda rete scelgo $I_1 = 0 \text{ A}$.



Considerazione

Essendo la rete lineare, è inutile che faccia due proporzioni per trovare separatamente I_1 e I_2 per poi sommarle. Posso sommarle prima, sapendo che $I = I_1 + I_2$ e poi fare la proporzione su I .

Nel primo circuito $I_1 + I_2 = \frac{7}{15} \text{ A}$ e nel secondo ovviamente $I_1 + I_2 = 1 \text{ A}$.

Fare questo è equivalente a fare la sovrapposizione degli effetti, con la unica differenza che la sovrapposizione degli effetti si fa sovrapponendo gli ingressi della rete (i vari generatori), mentre qui stiamo sovrapponendo le uscite.

La rete è però lineare e quindi non se ne accorge. 🍷

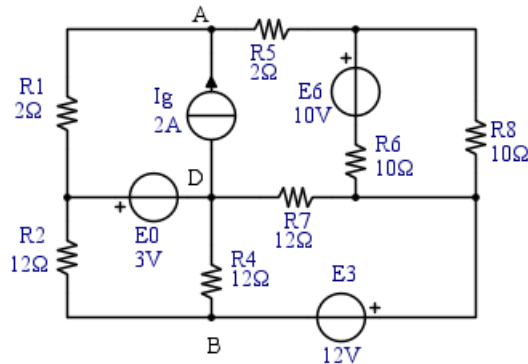
Imposto quindi la proporzione:

$$\frac{I - \frac{7}{15}}{10 - 12} = \frac{I - 1}{10 - 65}$$

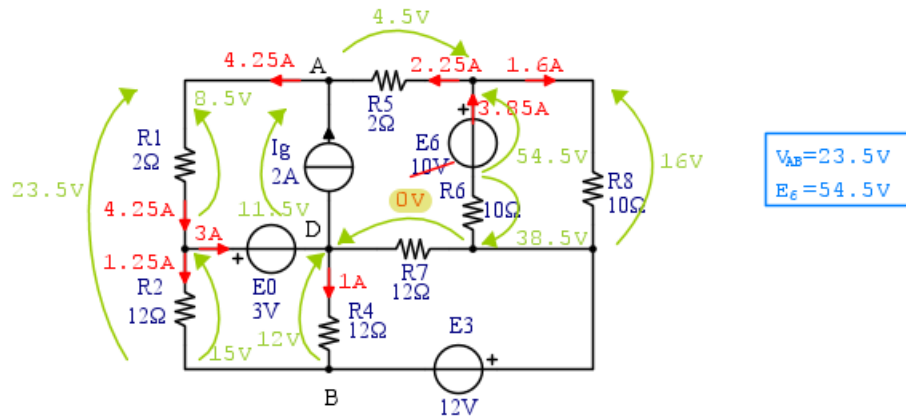
da cui $I = 446.54 \text{ mA}$ e $R_{eq} = E/I = 22.39 \Omega$

Esempio 4: Un circuito complicato

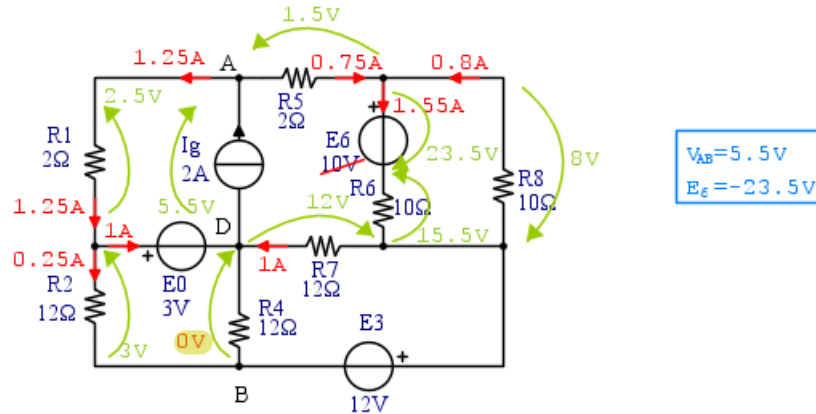
Veniamo adesso al circuito complicato dell'articolo di [admin](#). Eccolo:



Scelgo E6 come generatore da far variare e impongo, nel primo circuito $VR7=0$. Riporto quindi sullo schema tutte le tensioni e le correnti che mi servono, cominciando dalla tensione su R4, che è pari a E3, essendo $VR7=0$...



Per il secondo circuito scelgo $VR4=0$.



Nel mettere tutte le tensioni e le correnti mi sono cronometrato. 3 minuti e 34 secondi esatti in totale, fra entrambe le reti. Per fare i disegni con FidoCadJ ci ho impiegato quasi 15 minuti !

Imposto quindi la proporzione:

$$\frac{V_{AB} - 5.5}{10 - (-23.5)} = \frac{V_{AB} - 23.5}{10 - 54.5}$$

da cui $V_{AB} = 13.2 \text{ V}$.

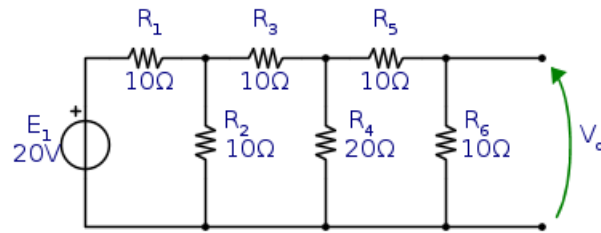
Diciamo che mi sento soddisfatto, ho risolto il circuito con la regola falsi come volevo. 😊

Esempio 5: Velocità di esecuzione

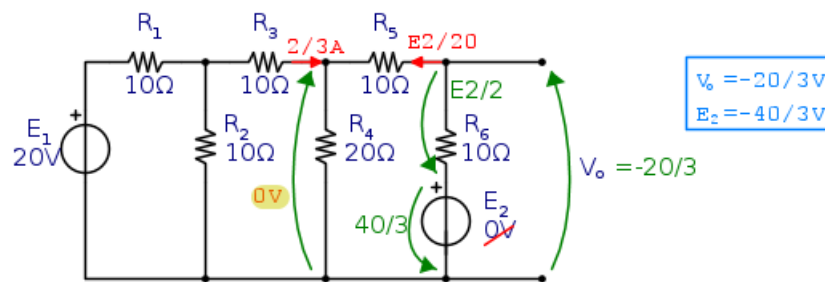
Quello che mi soddisfa di questo metodo è la velocità con cui mi ha permesso di risolvere alcune reti, molte delle quali direttamente facendo i calcoli a mente (ma in questo l'esperto incontrastato è il mai abbastanza lodato [IsidoroKZ](#))

Mi chiedevo se fosse possibile utilizzarlo per risolvere più velocemente reti noiose.

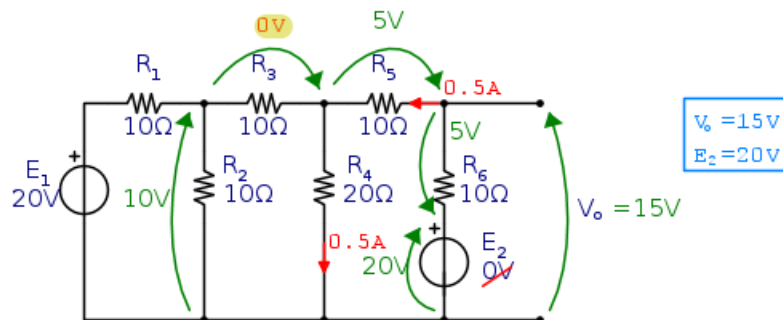
Per esempio, torniamo alla rete iniziale:



A questa rete posso aggiungere un secondo generatore di tensione, di valore pari a 0V, e poi sceglierlo come generatore da far variare. Lo aggiungo, come da schema sottostante e, per il primo circuito, scelgo $V_{R4}=0$:



Nel secondo circuito scelgo $V_{R3}=0$.



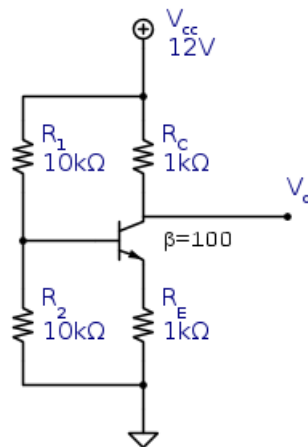
La proporzione risulta essere quindi: (la riporto per puro esercizio)

$$\frac{V_o - \left(-\frac{20}{3}\right)}{0 - \left(-\frac{40}{3}\right)} = \frac{V_o - 15}{0 - 20}$$

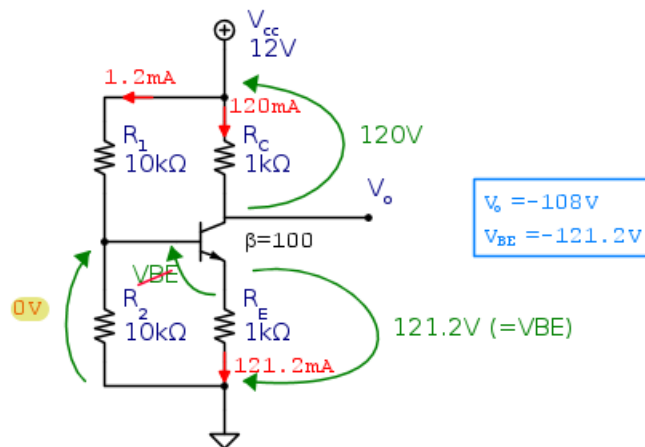
In reti più complicate potrebbe essere ancora meglio. Questa rete è semplice, in fondo.

Esempio 6: Variare la VBE di un transistor

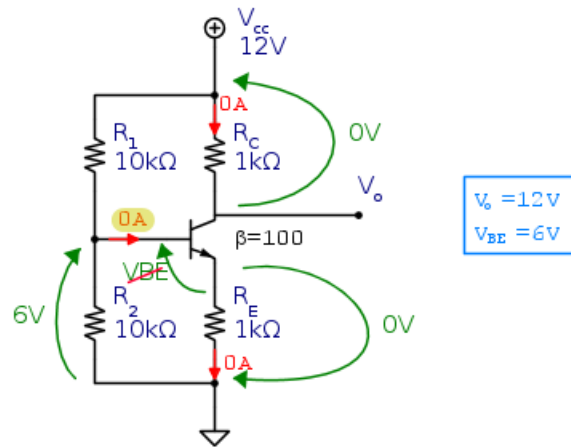
Ecco la superstraclassica rete di polarizzazione di un transistor, per la quale generazioni di studenti hanno sognato $V_{BE}=0.7V$ e $\beta = 100$. Vogliamo calcolare V_o .



Scelgo di variare la V_{BE} e assumo $V_{R2}=0$, per il primo circuito.



Per il secondo circuito impongo $I_B=0$.



Imposto quindi la proporzione:

$$\frac{V_o - (-108)}{0.7 - (-121.2)} = \frac{V_o - 12}{0.7 - 6}$$

da cui $V_o = 7 \text{ V}$

Conclusione

Ho svolto molti altri circuiti, presi qui e là dal forum, per divertirmi, ma alla fine ho deciso di riportare i più significativi, sperando di aver scritto qualcosa di utile che mi ha regalato qualche ora di spensieratezza.

Se avete idee, suggerimenti, o circuiti che reputate utili e interessanti, non esitate a farmi sapere. Posso aggiungerli a questo articolo, possiamo discuterne sul forum o, perchè no, sarei onorato di aggiungere qui un link ad un articolo tutto vostro sull'argomento!

Ringraziamenti

Appena torno a Torino vado a visitare il museo egizio per rendere omaggio a Ahmes, mentre, adesso, rendo omaggio a **RenzoDF**, ringraziandolo per l'ispirazione idraulica che mi ha dato!

Riferimenti e bibliografia

- [1] [Regula falsi con più generatori, EY Forum](#)
- [2] [Metodo della doppia falsa posizione, EY Forum](#)
- [3] [Problemi del papiro di Rhind, EY Forum](#)

[4] [Metodo della regola falsi in egiziano e ieratico, EY Forum](#)

[5] [Regola falsi applicata ad un circuito magnetico \(edit 3\), EY Forum](#)

[6] **Keith Devlin** I numeri magici di Fibonacci *BUR Rizzoli* (trovate il metodo a pagina 98 e seguenti, sulla versione per ipad-Kindle, ma per l'edizione cartacea la pagina dovrebbe corrispondere.)

Aggiornamento 5.12.2019

Mi è stato chiesto di pubblicare una formula, possibilmente mnemonica, già risolta per x.

Penso che possa essere una cosa del genere:

$$x = \frac{\frac{x_A}{G-G_A} - \frac{x_B}{G-G_B}}{\frac{1}{G-G_A} - \frac{1}{G-G_B}}$$

Estratto da "<https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Pietrobaima:regula-falsi-per-circuiti-con-pi-generatori>"