



Michele D'Amico (primiere)

ELETTROSTATICA

5 May 2012

Introduzione

L'elettrostatica è quella parte dell'elettromagnetismo che si occupa di studiare le proprietà e le interazioni fra corpi elettrizzati i quali presentano una carica elettrica in eccesso sulla loro superficie.

Le cariche elettriche sono di due tipi: carica positiva indicata con $+q$ o $+Q$, carica negativa indicata con $-q$ o $-Q$, dove nel SI l'unità di misura della carica è il coulomb (C).

Le cariche elettriche sono quantizzate e la più piccola carica negativa è posseduta dall'elettrone, indicata con $-e$, ed il suo valore è circa:

$$-e \approx -1,6 \times 10^{-19} C$$

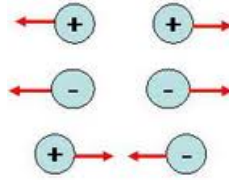
La più piccola carica positiva è posseduta dal positrone, indicata con $+e$, ed il suo valore è circa:

$$e \approx 1,6 \times 10^{-19} C$$

Introdotta la doppia natura delle cariche è possibile definire corpi elettrizzati positivamente (carichi positivamente) quei corpi che sulla loro superficie presentano un eccesso di cariche positive, viceversa è possibile definire corpi elettrizzati negativamente (carichi negativamente) quei corpi che sulla loro superficie presentano un eccesso di cariche negative.

In base alla mobilità dei portatori di cariche elettriche, ovvero gli elettroni e gli ioni, i materiali sono classificati in conduttori ed isolanti elettrici, ad esempio i metalli sono buoni conduttori mentre il vetro e la plastica sono materiali isolanti.

Le interazioni elettrostatiche si manifestano su corpi elettrizzati mediante forze attrattive o repulsive, ad esempio i corpi elettrizzati positivamente e quelli elettrizzati negativamente si attraggono tra di loro, mentre corpi elettrizzati con cariche dello stesso segno si respingono tra di loro:



In presenza di più corpi elettrizzati è possibile applicare il principio di sovrapposizione, inoltre per le cariche elettriche è valido il principio di conservazione della carica, il quale afferma che: "In un sistema isolato, la somma delle cariche elettriche presenti, positive e negative, rimane costante nel tempo".

Legge di Coulomb

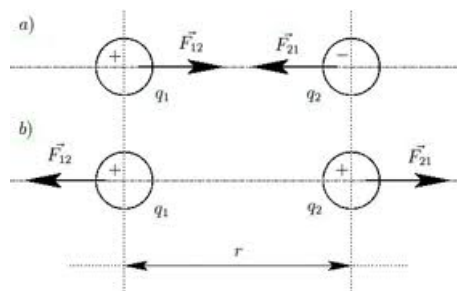
La legge di Coulomb misura la forza di interazione prodotta da due cariche elettriche considerate puntiformi q_1 e q_2 , poste nel vuoto alla distanza r l'una dall'altra.

nota: Una carica elettrica è considerata puntiforme se il corpo sul quale è concentrata ha dimensioni lineari trascurabili rispetto alla distanza r .

Essa è espressa dalla seguente relazione:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{n}_{12}$$

Dove $\mathbf{F}_{12}$ è la forza dovuta alla carica q_2 che agisce sulla carica q_1 :



Nel SI affinché sia verificata dimensionalmente la relazione precedente si ha che:

$$k \approx 8,99 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Ponendo le cariche puntiformi non nel vuoto, ma in un mezzo isolante omogeneo e illimitato, detto dielettrico, si ha la seguente relazione:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{n}_{12}$$

con:

$$\epsilon_r \geq 1$$

costante adimensionale detta costante dielettrica relativa del mezzo.

Dall'ultima relazione è possibile dedurre che:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

con:

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

detta costante dielettrica nel vuoto.

Campo elettrico

Il campo elettrico in un punto dello spazio è espresso da una grandezza vettoriale ed è indicato dal vettore **E**.

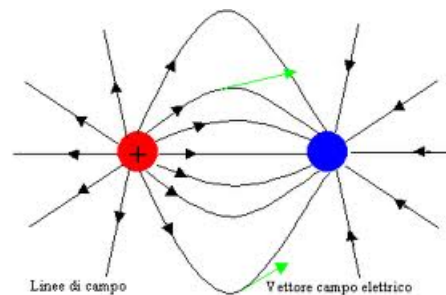
Per definire il vettore **E** in un punto P dello spazio, si utilizza una carica elettrica positiva di prova q_0 tendente a zero, ferma nel punto P e si determina la forza elettrica **F** che agisce su q_0 , quindi il campo elettrico nel punto P è dato dalla seguente relazione:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

nota: Il campo elettrico è detto elettrostatico quando è stazionario, non varia nel tempo ed è generato da cariche ferme nel sistema di riferimento inerziale.

Un campo elettrico è rappresentato graficamente con linee di forza (linee di campo), le quali sono curve la cui tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo elettrico in quel punto.

Per il campo elettrostatico le curve partono dalle cariche positive e terminano su cariche negative, inoltre esse possono andare all'infinito o provenire dall'infinito:



Nel caso di un sistema discreto di cariche puntiformi ferme $q_1, q_2, \dots, q_n$, il campo risultante generato, che agisce su una carica di prova q_0 posta in un punto di coordinate x, y, z , è il seguente:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

Nel caso di una distribuzione continua di cariche, si ha che le cariche possono essere distribuite lungo una curva, con densità lineare:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

su una superficie, con densità superficiale:

$$s = \frac{dq}{dS}$$

in un volume, con densità volumetrica:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

ed in tal caso il campo generato da tali distribuzioni continue di cariche si determina con il calcolo integrale.

Flusso del campo elettrico

In generale il flusso elementare di un vettore $\mathbf{A}$ attraverso una superficie elementare dS è espresso dalla seguente relazione:

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS = AdScos\alpha$$

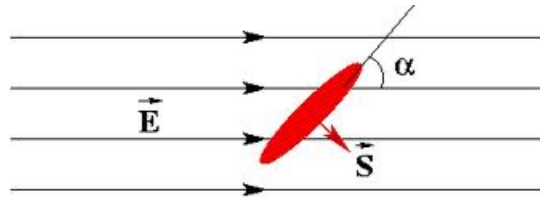
dove $\mathbf{n}$ è il versore perpendicolare alla superficie dS , inoltre indicando con $d\mathbf{S}$ il prodotto $\mathbf{n}dS$ si ha:

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = AdScos\alpha$$

Il flusso del vettore campo elettrico attraverso una superficie finita S è il seguente:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

ed esso corrisponde al numero di linee di forza che attraversano la superficie S :



Legge di Gauss

La legge di Gauss lega il campo elettrico e le cariche che lo hanno determinato, ed essa afferma che il flusso del campo elettrico dovuto ad una distribuzione di cariche elettriche, delimitate da una qualsiasi superficie chiusa, è proporzionale al valore della carica totale, delle cariche contenute nella superficie chiusa.

Essa può essere espressa in forma integrale:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

o in forma differenziale:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dove la divergenza di $\mathbf{E}$ esprime come varia il campo elettrico nello spazio e a destra dell'equazione abbiamo la densità di carica di volume delle cariche contenute nel volume delimitato dalla superficie chiusa.

Potenziale elettrico

Il lavoro elementare svolto da una forza esterna $\mathbf{F}_e$ per spostare di un valore infinitesimale una carica elettrica positiva, puntiforme e ferma di prova q_0 , posta in un campo elettrico $\mathbf{E}$ è:

$$dL = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

dove si nota come la forza esterna sia l'opposto della forza elettrica.

Se la forza $\mathbf{F}_e$ sposta tale carica di prova da un punto a ad un punto b del campo elettrico essa compie il seguente lavoro:

$$L = -q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

espresso mediante un integrale di linea e dal quale si nota come esso sia indipendente dal percorso scelto per passare dal punto a al punto b.

Si definisce differenza di potenziale elettrico tra i punti a e b il seguente rapporto:

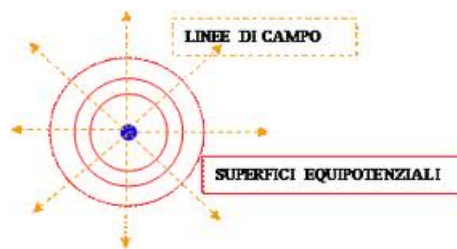
$$V_b - V_a = \frac{L}{q_0} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Per un punto generico P di coordinate (x,y,z) si ha la seguente definizione di potenziale elettrico:

$$V(x, y, z) = \frac{L}{q_0} = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

il quale nel SI è misurato in volt (V).

Superficie equipotenziale



Si definisce superficie equipotenziale una superficie i cui punti hanno tutti lo stesso potenziale, per la quale inoltre si ha il vettore $\mathbf{E}$ perpendicolare in tutti i punti ed in ogni punto si ha la seguente relazione tra potenziale e campo elettrico:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V(x, y, z)$$

dove il segno meno indica che il vettore $\mathbf{E}$ è diretto nel verso del potenziale decrescente.

nota: Un conduttore, posto in un campo elettrico, generato da cariche esterne al conduttore, si elettrizza per induzione, questo perchè le cariche elettriche del conduttore sono cariche libere e si distribuiscono sulla superficie di esso, in modo che il campo elettrico risultante è perpendicolare in qualunque punto della superficie del conduttore ed in qualunque punto interno è nullo, in questa particolare situazione la superficie del conduttore è equipotenziale.

Capacità elettrica

Considerato un conduttore con superficie elettrizzata, si definisce capacità elettrica il rapporto tra la carica sulla superficie ed il potenziale:

$$C = \frac{Q}{V(x, y, z)}$$

la cui capacità nel SI si misura in farad (F) dove $1\text{F}=1\text{C}/1\text{V}$.

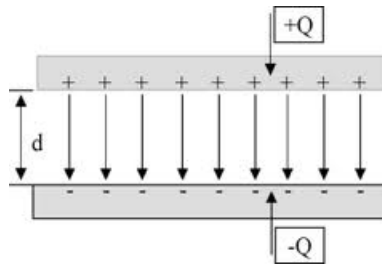
nota: La capacità tramite il potenziale dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo, oltre che dalle caratteristiche del mezzo nel quale è posto il corpo.

Condensatore

Un condensatore è un sistema di due conduttori, detti armature, aventi la stessa quantità di carica, ma di segno opposto, la capacità di un condensatore è definita nel seguente modo:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

dove il potenziale in questo caso rappresenta la differenza di potenziale tra le due armature:



nota: Un dielettrico, interposto tra le armature di un condensatore, fa aumentare la capacità del condensatore.

Energia immagazzinata in un condensatore

Il lavoro necessario per caricare un condensatore deve essere svolto da un dispositivo esterno, come ad esempio una batteria, che trasformando un'altro tipo di energia, in questo caso chimica della batteria, sposta gli elettroni dall'armatura positiva a quella negativa, dove questo lavoro si accumula nel condensatore sotto forma di energia potenziale elettrica e viene restituita all'esterno solo scaricando il condensatore.

Formalmente, considerando un condensatore che all'istante t ha quantità di carica $q(t)$, il lavoro infinitesimale per incrementare la carica di dq è il seguente:

$$dL = V(t)dq = \frac{q(t)}{C}dq$$

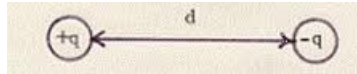
nel quale si è evidenziato la differenza di potenziale tra le armature all'istante t e la capacità del condensatore.

Il lavoro totale per caricare completamente il condensatore con quantità di carica Q è il seguente:

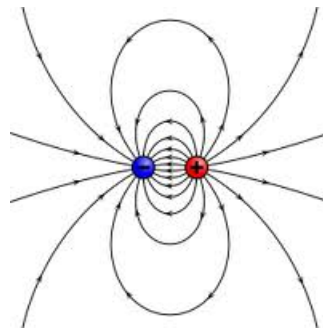
$$L = \int_0^Q \frac{q(t)}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = E$$

Dipolo elettrico

Si definisce dipolo elettrico un sistema di due cariche elettriche puntiformi nel vuoto, aventi lo stesso valore di carica q , ma di segno opposto $+q$ e $-q$, separate da una distanza d :



Il campo elettrico generato da tale sistema di cariche, ha le seguenti linee di forza:



Momento di dipolo elettrico

Si definisce momento di dipolo elettrico il vettore: $\mathbf{P}_e = q\mathbf{d}$ posto sull'asse che passa attraverso le due cariche puntiformi, detto asse di dipolo, e diretto dalla carica $-q$ alla carica $+q$. Utilizzando il momento di dipolo elettrico il campo generato in un punto distante r , con: $r \gg d$ è il seguente:

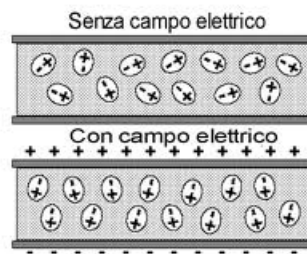
$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{(\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{P}_e}{r^3} \right)$$

Esistono in natura molecole neutre, come ad esempio quella dell'acqua, in cui la distribuzione delle cariche interne alla molecola genera un campo elettrico, che a grande distanza, è uguale a quello prodotto da un dipolo elettrico, a distanze paragonabili alla dimensione della molecola, invece, il campo è completamente diverso. Con molecole di questo tipo per determinare il campo a grandi distanze si utilizza il momento di dipolo elettrico, le cui dimensioni, per come è stato definito in precedenza, sono quelle di una carica elettrica per una lunghezza.

Dielettrici polari e non polari

I dielettrici sono materiali isolanti e ne esistono di due tipi, quelli polari e quelli non polari.

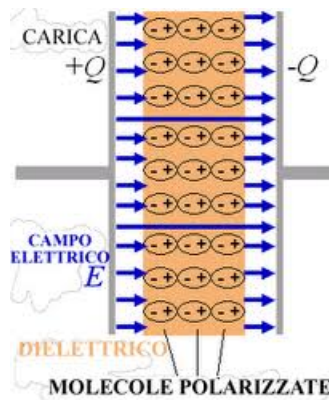
I dielettrici polari sono costituiti da molecole, ciascuna delle quali possiede un momento di dipolo elettrico $\mathbf{P}$ permanente. In un dielettrico polare, a causa dell'agitazione termica delle molecole, gli allineamenti dei momenti di dipolo elettrico sono casuali e all'esterno del dielettrico non si genera alcun campo elettrico. Inserendo un dielettrico polare in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, i momenti di dipolo elettrico delle molecole tendono ad allinearsi con $\mathbf{E}$, dove tale allineamento è tanto maggiore quanto più è intenso il campo elettrico esterno o quanto è più bassa la temperatura del dielettrico:



I dielettrici non polari sono costituiti da molecole, in ciascuna delle quali le cariche elettriche sono distribuite con simmetria tale da non generare un momento di dipolo elettrico $\mathbf{P}$ permanente. Inserendo tale tipo di dielettrico in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, le molecole vengono deformate e si separano le cariche positive da quelle negative, inducendo in ogni molecola un momento di dipolo elettrico indotto proporzionale al campo elettrico.

Costante dielettrica relativa

Considerato un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$ tra due lastre metalliche con superfici molto grandi e poste ad una distanza d , dove tale campo elettrico è ottenuto elettrizzando con cariche $+Q$ una lastra, le quali a loro volta inducono sull'altra lastra cariche $-Q$. A questo punto si inserisce, nel campo $\mathbf{E}$, fra le due lastre metalliche, una lastra di dielettrico con facce parallele e spessa d . Il campo $\mathbf{E}$ mette in rotazione i momenti di dipolo elettrico delle molecole e li allinea, ed a conseguenza di ciò si ha una accumulazione di carica positiva $+q$ su una faccia della lastra e di carica negativa $-q$ sull'altra faccia, senza che vi sia alcun accumulo di carica all'interno del dielettrico, il quale nel suo complesso rimane neutro:



La carica $+q$ si interfaccia con la lastra metallica con carica $-Q$, mentre la carica $-q$ si interfaccia con la lastra metallica con carica $+Q$, pertanto si ha un campo elettrico uniforme E_p che si oppone ad E , quindi si ottiene un campo elettrico risultante uniforme:

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$$

con:

$$|\mathbf{E}_{tot}| < |\mathbf{E}|$$

Si definisce costante dielettrica relativa del dielettrico, o permittività relativa, il seguente rapporto:

$$\epsilon_r = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}_{tot}|}$$

sempre maggiore o uguale ad 1.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Premiere:l-elettrostatica-vista-da-un-perito-elettronico>"