



Raffa ele (raffamaiden)

PRODOTTO GUADAGNO-BANDA

23 June 2013

Introduzione

Per rappresentare graficamente il guadagno di un circuito, si usa tracciare il diagramma di Bode del modulo del suo guadagno. Questo ha almeno 2 vantaggi: è bi-logaritmico, quindi ha sulle ascisse il logaritmo in base 10 della frequenza, e sulle ordinate il guadagno espresso in dB. Questo permette di rappresentare un'ampio intervallo di guadagni in un'ampio intervallo di frequenze usando poco spazio sul foglio.

Un'altro importante vantaggio è che esiste una formula che lega due guadagni con le rispettive frequenze. Tale formula può essere usata per controllare l'esattezza del diagramma di Bode, oppure direttamente per tracciarlo ricavando un guadagno o la frequenza di un polo o di uno zero. Inoltre si vede sotto quale ipotesi vale il cosiddetto "prodotto guadagno-banda costante".

Questo nasce come un promemoria per me stesso, poi ho pensato che era abbastanza lungo per farci un articolo e che potesse servire anche a qualcun altro, pertanto dopo una sistematina ho deciso di pubblicarlo, anche per ricambiare dell'aiuto ricevuto sul forum.

La formula per il prodotto guadagno-banda

Indichiamo con $G(f)$ il guadagno del circuito in funzione della frequenza.

Definiamo il *guadagno in dB* come il *modulo* del guadagno espresso in dB, in questo modo: $G(f)_{dB} = 20 \cdot \log_{10} (\|G(f)\|)$.

Supponiamo che, ad una certa frequenza, il diagramma di Bode del guadagno in dB abbia una pendenza di $+k 20 \frac{dB}{dec}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Infatti, in genere, il grafico del diagramma di Bode del modulo si traccia (a mano) approssimandolo come una funzione lineare a tratti. Ogni polo contribuisce alla pendenza della retta con -20 dB/dec , ogni zero con $+20 \text{ dB/dec}$.

Per esempio se ci troviamo dopo un solo polo, allora $k = -1$.

In generale, ad una fissata frequenza, avremo $k = m - n$, dove m è il numero di zeri ed n è il numero di poli che si trovano *prima* della nostra frequenza.

Per esempio, se in frequenza mi sposto di un *fattore* 10 (cioè multiplico per 10 una certa frequenza f), al guadagno a quella frequenza dovrò *aggiungere* $k \cdot 20_{\text{dB}}$ per ottenere il nuovo guadagno alla nuova frequenza, in formule $G(10f) = G(f) + k 20_{\text{dB}}$

Calcoliamo quanto vale $k 20_{\text{dB}}$ in lineare:

$$k 20_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(\text{lin}) \Rightarrow \text{lin} = 10^{\frac{k 20}{20}} = 10^k$$

Fissiamo due frequenze f_1 e f_2 , tali che $f_2 > f_1$. E' sempre possibile scrivere f_2 come:

$$f_2 = 10^D f_1$$

per un certo D tale che:

$$D = \log_{10} \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

Riscriviamo la penultima formula usando la definizione di potenza:

$$f_2 = f_1 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{D \text{ volte}}$$

Quindi devo moltiplicare f_1 per 10 D volte per ottenere f_2 , vale a dire D è il numero di decadi che separano f_2 da f_1 . Quindi se parto da f_1 , dovrò fare D decadi per arrivare a f_2 .

Vogliamo calcolare il guadagno alla frequenza f_2 . Per alleggerire la notazione definiamo:

$$G_2 = G(f_2)$$

$$G_1 = G(f_1)$$

Quindi:

$$G_{2,\text{dB}} = G_{1,\text{dB}} + \underbrace{k 20}_{\text{dB/decade}} \cdot \underbrace{D}_{\text{numero decadi}}$$

Cioè:

$$20 \log_{10} (G_2) = 20 \log_{10} (G_1) + 20 \log_{10} (10^k) D$$

$$\log_{10} (G_2) = \log_{10} (G_1) + \log_{10} (10^k) D$$

$$G_2 = 10^{\log_{10}(G_1) + \log_{10}(10^k)^D}$$

$$G_2 = 10^{\log_{10}(G_1)} \cdot 10^{\log_{10}(10^k) \cdot D}$$

$$G_2 = 10^{\log_{10}(G_1)} \cdot 10^{\log_{10}(10^{D \cdot k})}$$

$$G_2 = G_1 \cdot 10^{D \cdot k}$$

$$G_2 = G_1 \cdot 10^{\log_{10}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \cdot k}$$

$$G_2 = G_1 \cdot 10^{\log_{10}\left[\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^k\right]}$$

$$G_2 = G_1 \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^k$$

E quindi

$$G(f_2) = G(f_1) \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^k$$

Un'altro modo per ricordare la formula è

$$b = -k \Rightarrow k = -b$$

$$G(f_2) = G(f_1) \cdot \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^{-b}$$

$$G(f_2) = G(f_1) \cdot \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^b$$

$$G(f_1) f_1^b = G(f_2) f_2^b$$

Ma bisogna ricordarsi che in questo caso il coefficiente b è definito con il segno -, cioè nel guadagno la retta a quella frequenza ha una pendenza di

$$-b \cdot 20 \frac{\text{db}}{\text{dec}}$$

Nel caso di un filtro, b sarà esattamente l'ordine del filtro.

Casi particolari

Per esempio, supponiamo di scendere a $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$, ciò vuol dire che $b = 1$. Ottengo

$$G(f_2) \cdot f_2 = G(f_1) \cdot f_1$$

Quindi **a -20 db/dec il prodotto guadagno-banda è costante**, vale a dire il prodotto tra il guadagno ad una certa frequenza e la frequenza stessa è lo stesso per tutte le frequenze.

Conclusioni

La formula può essere usata per controllare analiticamente l'esattezza di un diagramma di Bode dopo che lo si è tracciato usando altre vie, oppure può essere usata direttamente per tracciarlo quando manca il guadagno ad una certa frequenza o la frequenza di un polo o di uno zero, e poi si può controllare il risultato con altre vie

Per esempio, se nel nostro circuito c'è un condensatore, possiamo calcolare la frequenza del polo e dello zero da questo introdotto, quindi calcoliamo il guadagno a bassa frequenza sostituendo al condensatore un circuito aperto, e il guadagno ad alta frequenza sostituendo al condensatore un circuito chiuso. Possiamo quindi calcolare l'esattezza dei risultati usando la formula sopra.

La formula vale per qualsiasi numero di poli e zeri. Inoltre come si vede dalla dimostrazione non dipende dal fattore 20 davanti, può quindi essere usata anche per trasferimenti di potenza.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Raffamaiden:prodotto-guadagno-banda>"