

Renzo DF (RenzoDF)

SIMBOLICA O NUMERICA ?

10 February 2009

Abstract

Soluzione di un'equazione differenziale nella modalita' simbolica e numerica.

Introduzione

Prendendo spunto da un post del forum di elettronica su un circuito R-L-C in regime transitorio, analizziamo la possibilita' di risoluzione al calcolatore di una equazione differenziale del secondo ordine, attraverso l'uso di tre programmi gratuiti presenti nell'elenco dei [Free Tools di ElectroYou](#).

Per la soluzione simbolica useremo Maxima, mentre per la soluzione numerica useremo VisSim e Scilab.

Circuito

Dato il seguente circuito R-L-C

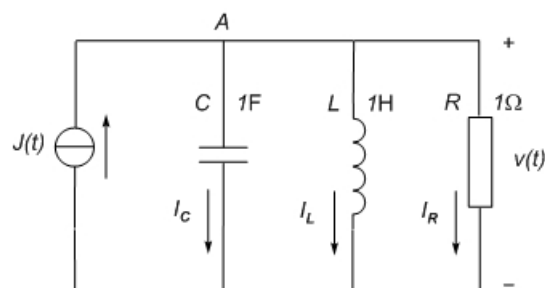


fig.0

alimentato da un generatore di corrente definito dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} J(t) = -1 \text{ A} & t < 0 \\ J(t) = +1 \text{ A} & t \geq 0 \end{cases}$$

dal principio di Kirchhoff al nodo A otteniamo

$$i_R + i_L + i_C = 1$$

e applicando le equazioni caratteristiche di ogni bipolo avremo

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt + C \frac{dv}{dt} = 1$$

che per comodita' riscriviamo come

$$\frac{1}{RC} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v + \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

Ci proponiamo di ricercare una soluzione per via simbolica con wxMaxima e una soluzione per via numerica con VisSim e Scilab

Maxima

Per la simulazione per via simbolica, facciamo uso di [xwMaxima](#) (purtroppo Maple Demo non permette la risoluzione di equazioni differenziali).

Inseriamo l'equazione nella finestra principale come prima "cella" ricordando di terminare con un ";" e completare con un **SHIFT+ENTER** .

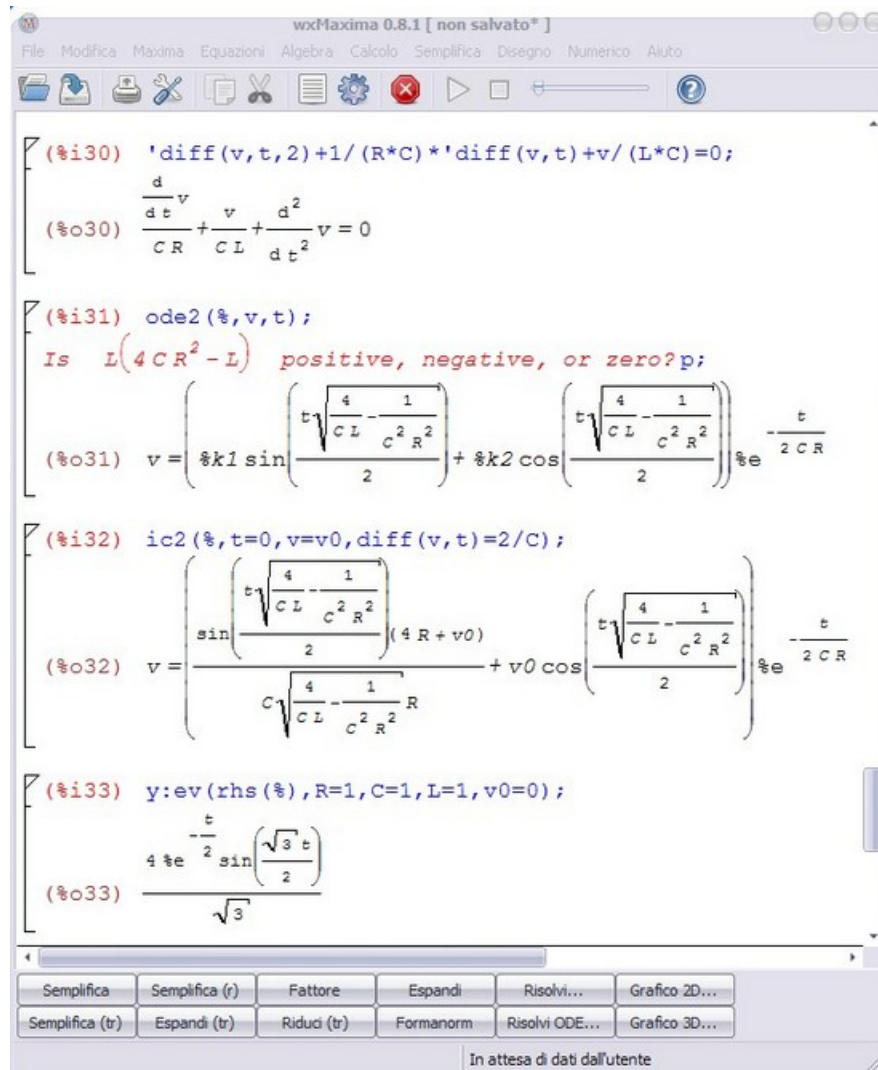


fig.1

Notiamo come automaticamente Maxima nomini la riga di input con (%i30) e la riga di output con (%o30).

La successiva richiesta di risoluzione della **ODE** (Ordinary Differential Equation) di secondo ordine (2) avviene alla riga (%i31) con un **ode2**; il "%" indica l'ultimo risultato dell'elaborazione (equivalente all' "ans" di Scilab).

Maxima a questo punto, non avendo ancora assegnato i valori numerici di R, L e C, richiede per proseguire, l'input del segno di $L(4CR^2 - L)$ che corrisponde curiosamente, non al segno del **discriminante** Δ , ma del suo opposto; Maxima prende cioè come scelta principale il caso di radici complesse, nel nostro esempio avendo supposto per semplicità $R=C=L=1$, la nostra risposta sarà "p" (lascio al lettore la simulazione con le altre due alternative).

Ricordo che il *discriminante* di un'equazione di secondo grado e' pari a

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \frac{1}{R^2 C^2} - \frac{4}{CL} = \frac{L - 4R^2 C}{R^2 C^2 L} = \frac{L(L - 4R^2 C)}{R^2 C^2 L^2}$$

L'output (%o31) e' la soluzione generale dell'equazione differenziale; notiamo la presenza delle costanti %K1 e %K2, dei due termini in *seno* e *coseno* (caratteristici delle radici complesse) e del termine di smorzamento $e^{-\beta t}$.

Con (%i32) inseriamo la riga delle condizioni iniziali attraverso **ic** (initial conditions) considerando i valori iniziali al tempo $t=0+$.

Non essendo ammesse discontinuita' sulla tensione ai capi del condensatore e sulla corrente nell'induttore,

$$\frac{v(0+)}{R} + i_L(0+) + C \frac{dv}{dt}(0+) = 1 \rightarrow \frac{0}{R} - 1 + C \frac{dv}{dt}(0+) = 1$$

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{2}{C}$$

per mantenere una maggior generalita' inseriamo per $t=0+$, $v=v_0$ e $dv/dt=2/C$ e otteniamo l'equazione finale (%032) per $v(t)$.

E' interessante notare come, con un semplice comando **tex(%)**, possiamo ottenere la conversione della formula in codice TEX;

```
tex(%);
$$v=\left(\left(\sin \left(\left\{t\right\},\sqrt{\left\{4\right\}\over{C\,L}}-\left\{C^2\right\}\over{R^2}\right)\right)\over{2}\right)\, ,\left(4\,R+\left\{it\,v_0\right\},C^2\right)\over{C\, ,\sqrt{\left\{4\right\}\over{C\,L}}-\left\{C^2\right\}\over{R^2}}\right)\, ,R\}+\left\{it\,v_0\right\},\cos \left(\left\{t\right\},\sqrt{\left\{4\right\}\over{C\,L}}-\left\{C^2\right\}\over{R^2}\right)\right)\over{2}\right)\right)\, ,e^{\left\{-\left\{t\right\},C\right\}\over{2\,R}}\, }$$
```

un semplice copia-incolla, ci permetterà di scriverla, in formato HQ;

$$(\%032) v = \left(\frac{\sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{C^2}{R^2}}}{2}\right) (4R + v_0 C^2)}{C\sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{C^2}{R^2}} R} + v_0 \cos\left(\frac{t\sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{C^2}{R^2}}}{2}\right) \right) e^{-\frac{t}{2R}}.$$

A questo punto (%i34), particularizziamo $v(t)$ fissando le costanti del circuito: $R=1$, $L=1$, $C=1$, $V_0=0$ ottenendo la (%o34), che rappresenta sia la tensione $v(t)$ sul parallelo sia la corrente $IR(t)$.

```

wxMaxima 0.8.1 [ RLC1.wxm* ]
File Modifica Maxima Equazioni Algebra Calcolo Semplifica Disegno Numerico Aiuto

(%i34) y:ev(% ,R=1,C=1,L=1,v0=0,);
(%o34) (4 * e^(-t/2) * sin(sqrt(3)*t/2)) / sqrt(3)

(%i46) z:diff(y,t);
(%o46) 2 * e^(-t/2) * cos(sqrt(3)*t/2) - (2 * e^(-t/2) * sin(sqrt(3)*t/2)) / sqrt(3)

(%i88) x:integrate(y,t);
(%o88) (4 * e^(-t/2) * (-sin(sqrt(3)*t/2)/2 + sqrt(3)*cos(sqrt(3)*t/2)/2)) / sqrt(3)

(%i92) ev(x,t=0);
(%o92) -2
  
```

fig.2

Per il calcolo della corrente nel condensatore $IC(t)$ e di quella nell'induttore $IL(t)$, passiamo a differenziare (%i46) ed a integrare (%i88) la tensione sul condensatore $v(t)$.

Con l'integrazione, $IL(t)$ e' determinata a meno di una costante e di conseguenza valutiamo x per $t=0$ (%i92); il risultato pari a -2 ci permette di determinare la costante.

Da $IL(0)+k=-2+k$ con $IL(0)=-1$, ricaviamo $k=1$.

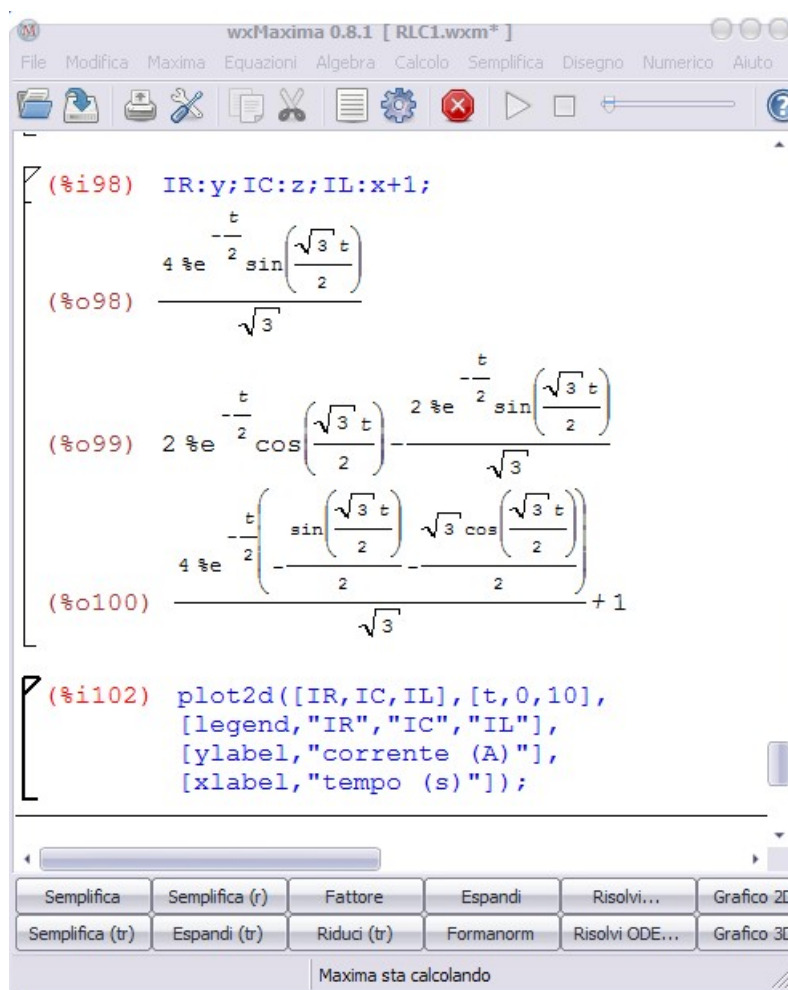


fig.3

Abbiamo così i risultati finali per le tre correnti $IR(t)$ (%o98), $IC(t)$ (%o99) e $IL(t)$ (%o100).

Per la visualizzazione grafica finale usiamo un **plot2d** e Maxima attraverso Gnuplot ci dara' il seguente grafico; si nota, a conferma della soluzione, come la somma delle tre correnti sia sempre pari a 1 ampere.

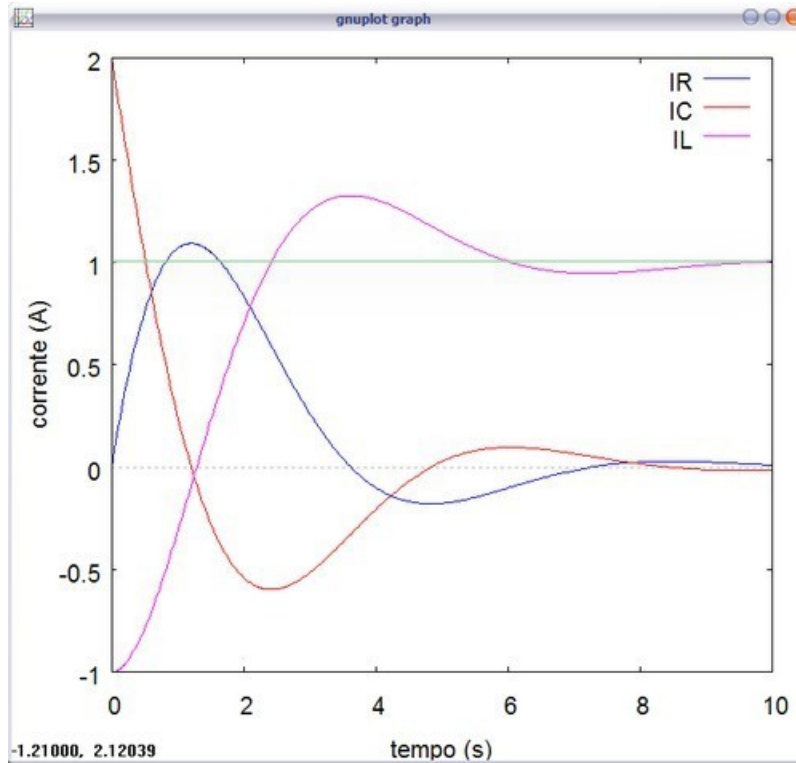


fig.4

VisSim

La simulazione numerica attraverso VisSim si ottiene come al solito costruendo per prima cosa la catena di integrazione a partire dalla derivata prima **$dv/dt > \text{funzione } v(t) > \text{integrale di } v(t) [\$v]$** .

La simulazione del generatore di corrente con intensita' che passa da -1A a +1A al tempo zero, e' ottenuta attraverso un blocco sommatore che addiziona una costante pari a -1 ad uno scalino di ampiezza pari a 2 al tempo zero e le condizioni iniziali degli integratori entrambe a zero.

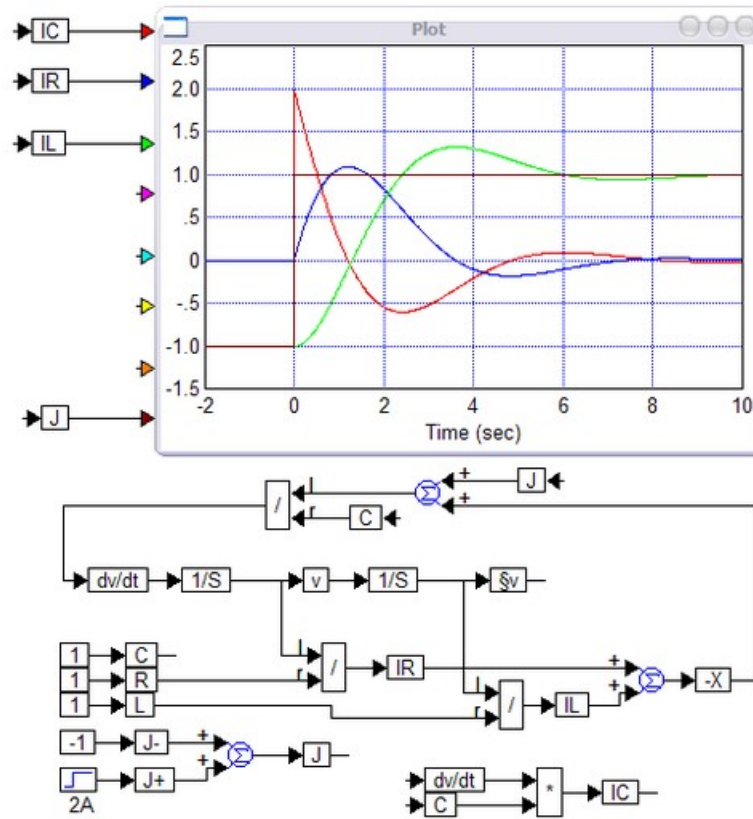


fig.5

la struttura dello schema a blocchi e' costruita sulla base della seguente rappresentazione analitica

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \left[J - \left(\frac{1}{L} \int v dt + \frac{v}{R} \right) \right]$$

dove l'uguaglianza fra i due membri dell'equazione differenziale è rappresentata dall'ultimo collegamento di controreazione (in alto a sinistra).

Il collegamento dei segnali principali al display, e i settaggi sotto Simulate > Simulation Properties > Start=-10s, Time-Step=0.01s, End=10s, ed un GO finale, completano la simulazione.

VisSim permette di effettuare una **simulazione dinamica**; sostituendo le costanti di ingresso con degli **"slider"** viene permessa una regolazione continua dei parametri in un predeterminato campo di valori.

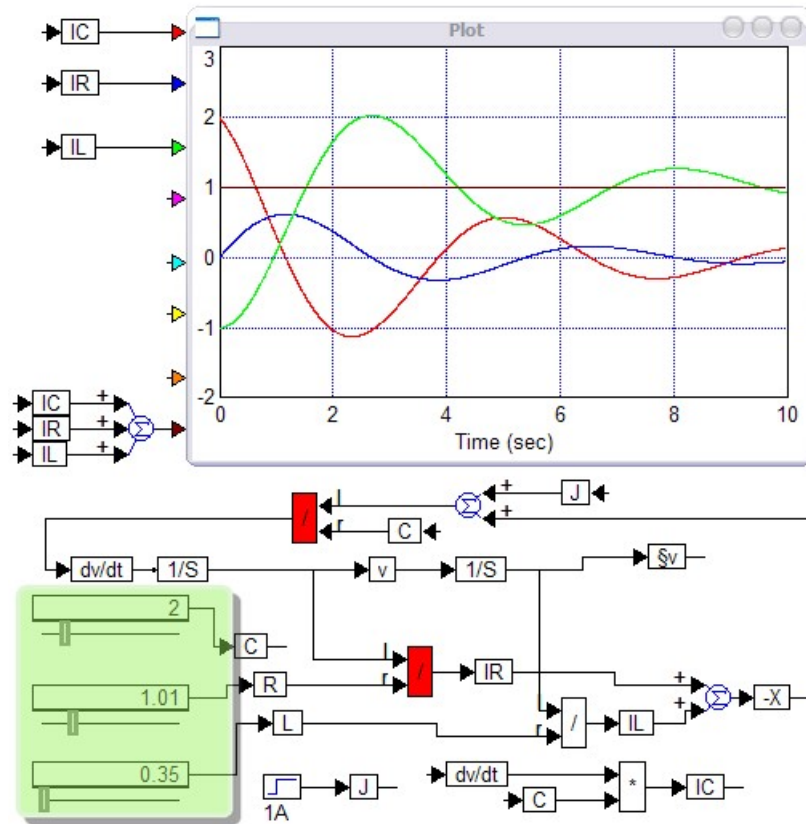


fig.5b

In questa seconda simulazione, a differenza della prima (fig.5), lo scalino di ingresso a J e' di 1 ampere mentre la condizione iniziale del secondo integratore e' stata impostata a -L.

[Errata Corrigere: nei grafici di fig.5 e fig.5b sostituire (*sec*) con (*s*)]

Scilab

In Scilab il discorso e' simile a quello visto per VisSim anche se un po' piu' complesso dal punto di vista matematico.

Usiamo l'algoritmo associato a **ode** che rappresenta la funzione standard per la risoluzione delle equazioni differenziali del tipo

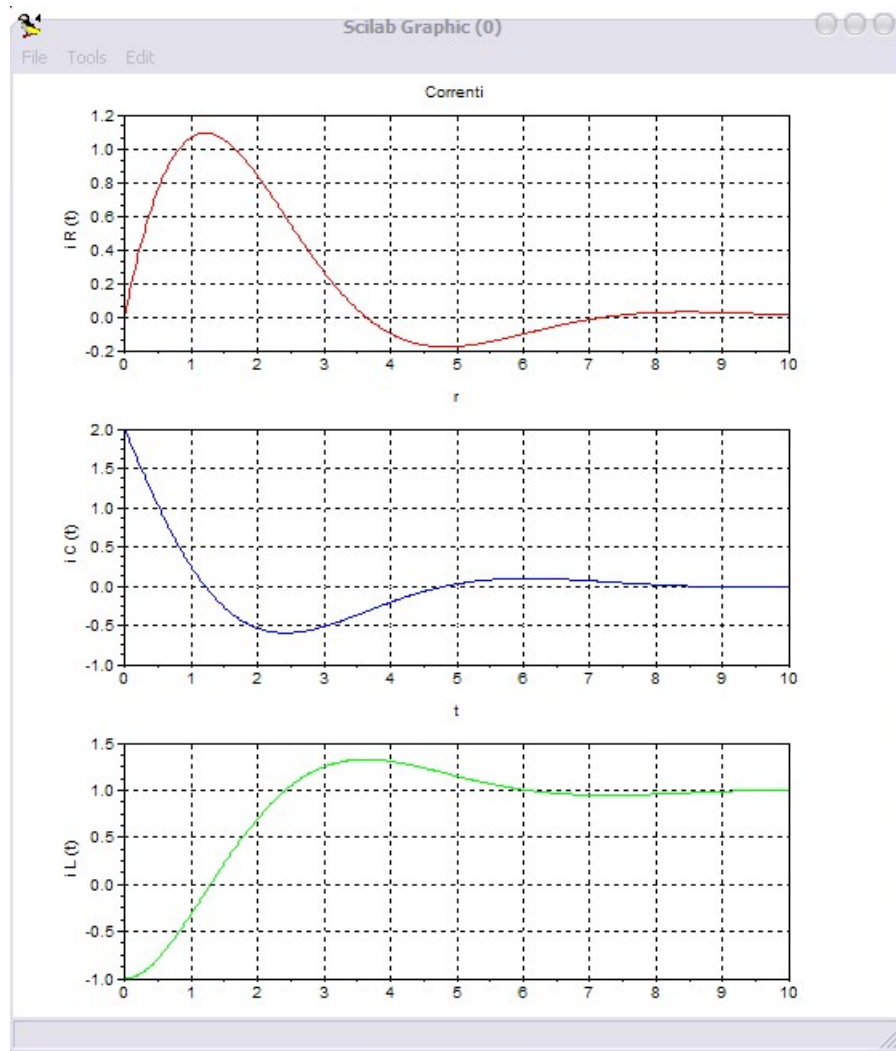
$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(0) = y_0$$

Per i gradi superiori al primo si è costretti ad un'impostazione vettoriale nella quale le successive derivate vengono ricavate, per via numerica, con una serie di equazioni differenziali del primo ordine.

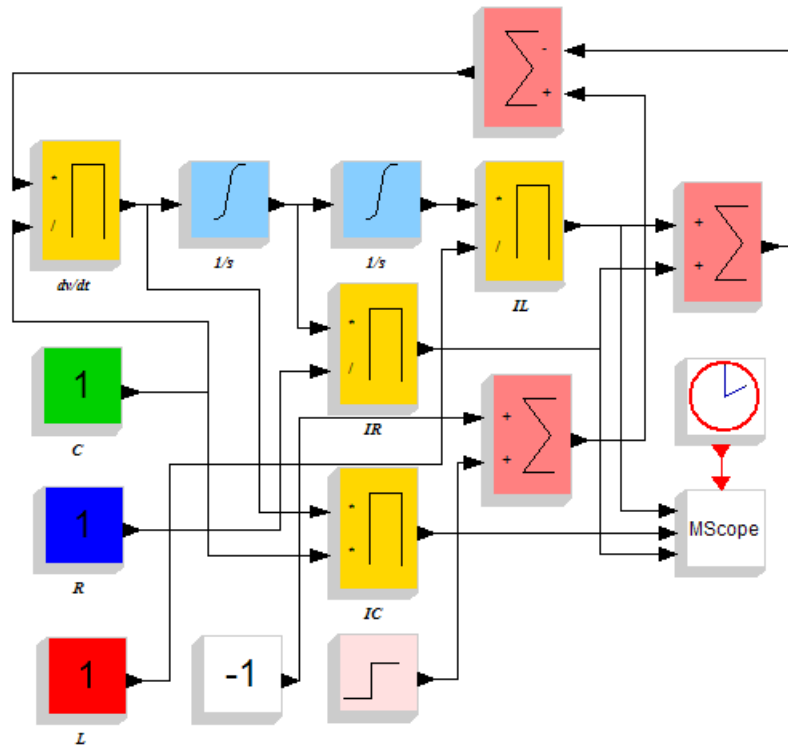
Il codice relativo sarà:

```
// *****
// Equazione differenziale secondo ordine
//  $y + y'/(RC) + y/(LC) = 0$ 
// *****
L=1;C=1;R=1;
// Definisco la funzione
function [z]=diffeq(t,y)
    z(1)=y(2);
    z(2)=-y(2)/(R*C)-y(1)/(L*C) ;
endfunction
// Condizioni iniziali
y(2)=2/C; y(1)=0;
y0=[y(1);y(2)];
// Definiamo Start - Step - End
t0=0; t=0:.02:10; // 500 passi
// Soluzione primo ordine
y=ode(y0,t0,t,diffeq);
// Grafico della iR(t)
subplot(3,1,1)
plot2d(t,y(1,:),5);xgrid()
xlabel("Correnti","t","i R (t)");
// Grafico della iC(t)
subplot(3,1,2)
plot2d(t,y(2,:),2);xgrid()
xlabel(" ","t" ,"i C (t)");
// Grafico della iL(t)
subplot(3,1,3)
plot2d(t,1-y(1,:)-y(2,:),3);xgrid()
xlabel(" ","t" ,"i L (t)");
//-----eof
```

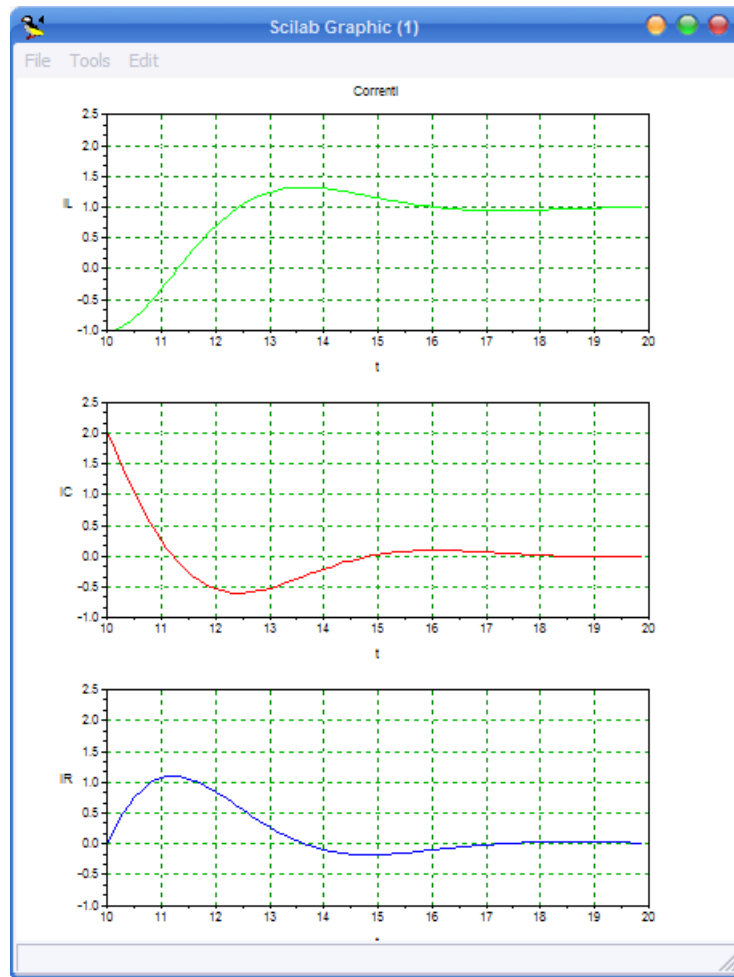
Con l'output grafico per le correnti $i_R(t)$, $i_C(t)$ e $i_L(t)$ di fig.6.

*fig.6*

Ed infine, costruiamo in modo simile a quanto fatto per VisSim, uno schema a blocchi con Scicos



che fornirà i seguenti andamenti per IL, IC e IR.



Ovviamente la costruzione dello schema a blocchi con Scicos può essere, come in questo caso, complessa; ci si può allora chiedere se esista un metodo più rapido per inserire il sistema lineare in Scicos.

Ricordando che in generale sarà possibile rappresentare il sistema attraverso le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \\ y = c_1x_1 + c_2x_2 + du \end{cases}$$

e dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

particolarizzando per il nostro sistema dinamico

$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}(J - i_L - i_R) \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{v_c}{L} \\ i_R = \frac{v_c}{R} \end{cases}$$

e ponendo

$$u = J, \quad x_1 = v_c, \quad x_2 = i_L, \quad y = i_R$$

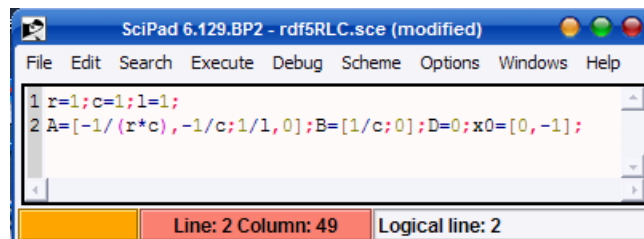
potremo scrivere il sistema di equazioni in forma matriciale come

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

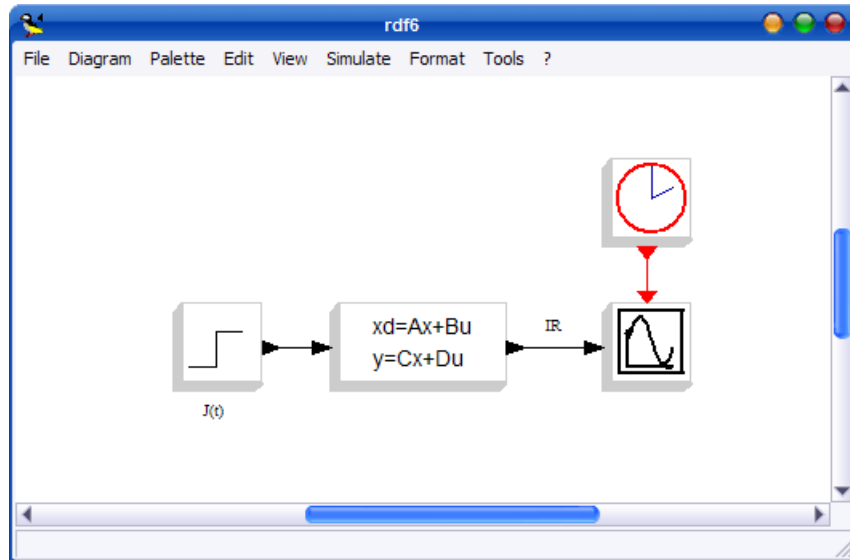
con

$$A = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1/R \quad 0] \quad D = 0$$

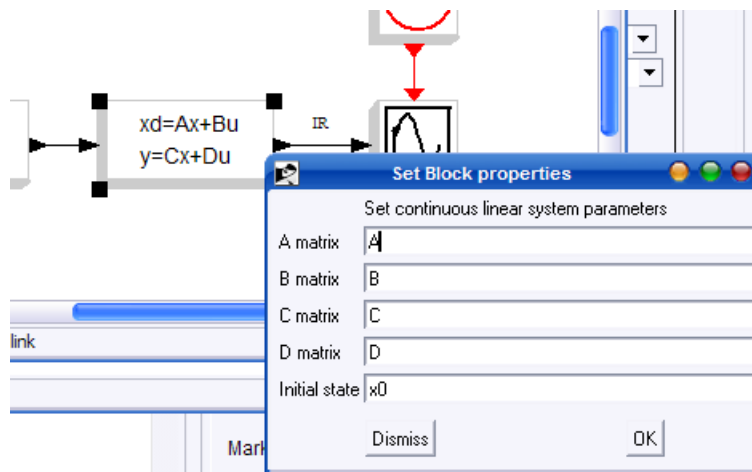
e condizioni iniziali $x_0 = [0, -1]$, tensione nulla e corrente pari a -1 ampere nell'induttore, usando l'Editor inseriremo



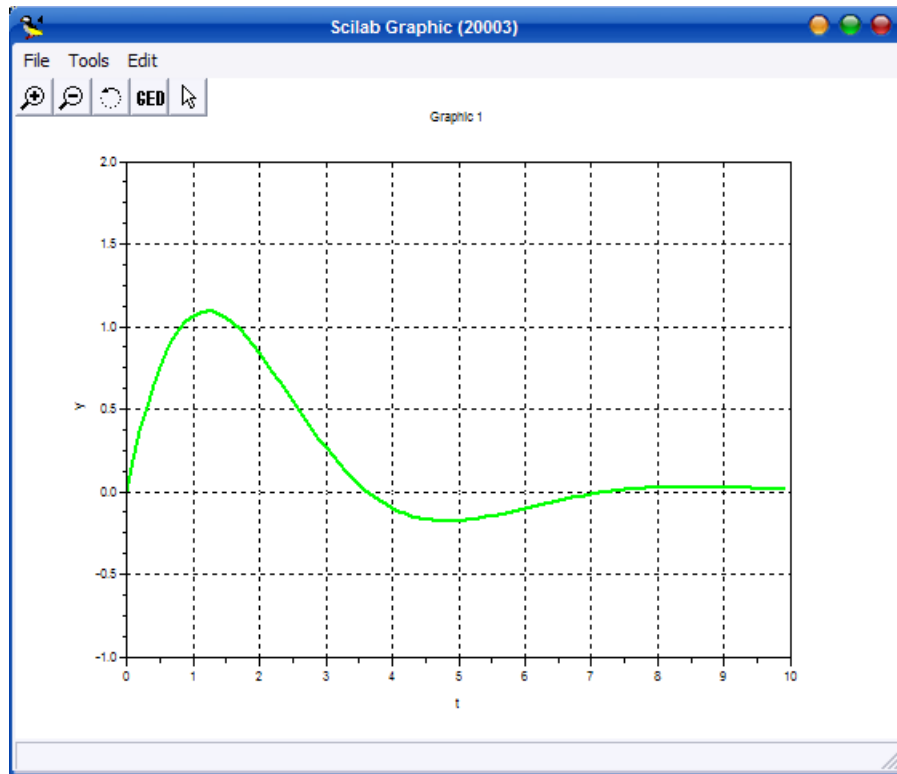
e quindi in Scicos potremo fare riferimento alle matrici A, B, C, D e x_0 per costruire il blocco rappresentativo il sistema



settando i parametri con



e ottenendo dalla simulazione l'andamento della $iR(t)$



NB si fa notare come aggiungendo altri 2 blocchi CLSS in parallelo, si sarebbero ottenuti anche gli andamenti delle altre due correnti !

to be continued ...

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Renzodf:articolo12>"