Non Attivo Riichiesta utente (simo85)

SULL'UNITÀ IMMAGINARIA - ALCUNE RISPOSTE DI DIRTYDEEDS & PIETROBAIMA

7 July 2015

Premessa

Questo articolo nasce dall'idea di racchiudere alcune risposte da parte di **PietroBaima** e **DirtyDeeds** sull'unità immaginaria.

Ultimamente se ne è parlato parecchio nel forum, e parecchi sono gli insegnamenti che ci hanno dato i nostri due amici. Quindi, dopo ormai qualche thread, a suo tempo ho proposto a loro due di scrivere un articolo in cui racchiudere queste risposte. Fu cosi che **PietroBaima**, in seguito alla mia proposta, mi ha invitato a prepare un articolo che raccogliesse queste informazioni dal forum e di rivederlo assieme prima della pubblicazione finale.

È una proposta che ho accettato, ovviamente. Non potevo dire di no.

Consideratelo quindi come un seguito della raccolta di **admin**: "**Alcune risposte di ...** ", solo che in questo caso chi scrive sono io (**simo85**).

Purtroppo il mio contributo matematico è ≈ 0, io ho fatto solo *la gavetta*, ma è giusto cosi. La mia preparazione matematica è nulla in confronto a quella di **PietroBaima** e **DirtyDeeds**, ma ci tenevo al fatto che nella comunità ci fosse un articolo che chiarisse qualche concetto riguardo all'argomento trattato.

Attenzione: come anticipato, nelle prossime sezioni verranno riportate alcune notevoli risposte. Per facilitare la lettura e la formattazione, ho deciso di aggiungere la sequenza di caratteri **[/ R]** per delimitare la fine della risposta. Quando e dove sarà necessario sarà riportato in grassetto in maniera esplicita l'inizio della risposta. Nel caso si debba delimitare una domanda, userò la sequenza **[/ D]**.

Introduzione

Il *colpevole* di tutto ciò, come anticipato prima, è il nostro amico immaginario, sí proprio lui:

$$\mathrm{i}$$

ma non tanto perché un amico immaginario può essere un classico sintomo di schizofrenia (come suggerisce il nostro caro **clavicordo**), ma bensí perché in molti casi si è finiti a chiacchierare sulla famigerata uguaglianza:

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \qquad (1)$$

Attenzione: per il bene dell'umanità, da questo momento in poi farò riferimento all'equazione appena scritta come **l'uguaglianza** o **l'equazione (1)**, o semplicemente **(1)**.

È stato fatto notare più volte che l'equazione **(1)** porta a molti errori.

Putroppo questo è un errore che si trova in molti libri di recente pubblicazione, e di conseguenza si tende a considerare corretta l'equazione **(1)**. **PietroBaima** e **DirtyDeeds** hanno dimostrato ed insegnato in maniera anche molto elegante il perché, e questo è uno dei motivi principali che mi ha spinto a racchiudere certe informazioni all'interno di questo articolo.

Anche io in passato ho spesso considerato l'equazione **(1)** come corretta, poi, non ricordo più esattamente chi me lo fece notare, e da allora ho sempre considerato come veritiera l'equazione:

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad (2)$$

ma **PietroBaima** ha suggerito che quest'ultima, in certe situazioni, potrebbe dare gli stessi problemi dell'uguaglianza **(1)**. Più avanti vedremo il perché.

È bene dire che nel passato, l'equazione **(1)** era considerata come valida. Forse è anche per questo che con il tempo si continua a trovare l'errore citato in molti libri, che non saranno comunque indicati in questo articolo.

Per questo motivo, prima di riassumere le risposte dei nostri due *mathematical pusher*, ho pensato di fare un cenno riguardo la storia dei numeri complessi.

Un cenno sulla storia dei numeri complessi

Nella scienza della matematica, i numeri sono stati inventati per contare e quindi di conseguenza per risolvere qualsiasi tipo di problema tecnico e scientifico per descrivere anche la natura che ci circonda, e fin qui niente di nuovo.
I numeri complessi, come i loro colleghi reali, nascondo quindi dall'esigenza di risolvere determinati problemi. Il caso più semplice potrebbe appunto essere quello di risolvere l'equazione:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (3)$$

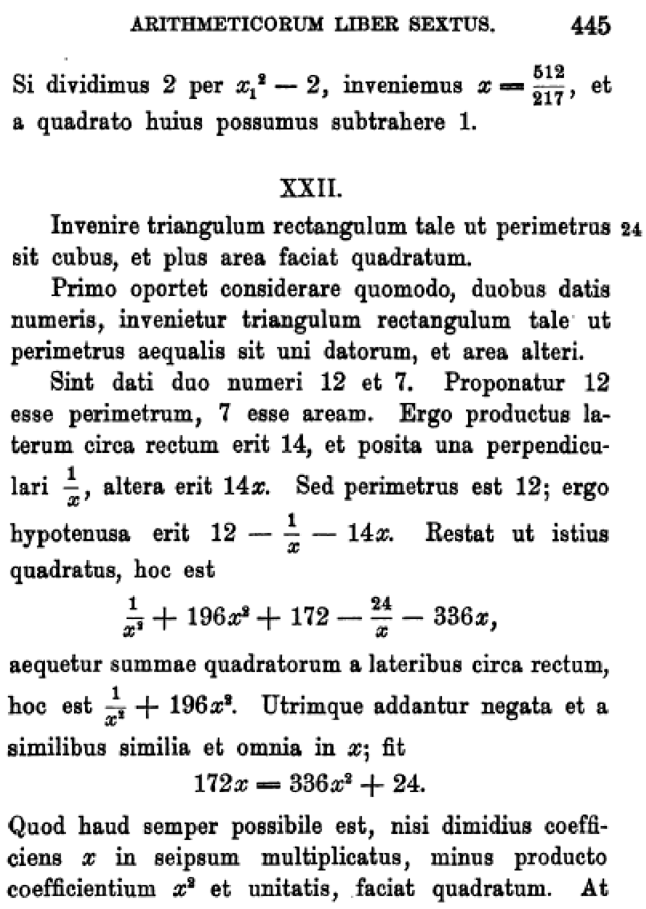
Possiamo esprimere il risultato nella forma:

$$x = \pm\sqrt{-1} \qquad (4)$$

? Ovviamente no.

Si racconta che il primo a trovarsi con questo tipo di problema fù **Erone di Alessandria** (un antico inventore e matematico greco), il quale attorno al 65 AD (**Anno Domini**) si trovó di fronte alla necessità di usare tali numeri (complessi) su alcuni calcoli di volumi dei corpi.
Infatti è risaputo che con il corso degli anni lo studio dei numeri complessi si sia sviluppato proprio attorno agli studi delle soluzioni di funzioni cubiche.

Anche **Diofanto di Alessandria** (anch'essi un antico matematico greco), durante i propri studi sulle equazioni e trigonometria nel suo libro "**Arithmeticorum**" (nel quale compare anche l'equazione **(3)** si sia trovato a trattare con polinomi a radici complesse.



ARITHMETICORUM LIBER SEXTUS. 445

Si dividimus 2 per $x_1^2 - 2$, inveniemus $x = \frac{512}{217}$, et a quadrato huius possumus subtrahere 1.

XXII.

Invenire triangulum rectangulum tale ut perimetrus sit cubus, et plus area faciat quadratum. 24

Primo oportet considerare quomodo, duobus datis numeris, invenietur triangulum rectangulum tale ut perimetrus aequalis sit uni datorum, et area alteri.

Sint dati duo numeri 12 et 7. Proponatur 12 esse perimetrum, 7 esse aream. Ergo productus laterum circa rectum erit 14, et posita una perpendiculari $\frac{1}{x}$, altera erit $14x$. Sed perimetrus est 12; ergo hypotenusa erit $12 - \frac{1}{x} - 14x$. Restat ut istius quadratus, hoc est

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 + 172 - \frac{24}{x} - 336x,$$

aequetur summae quadratorum a lateribus circa rectum, hoc est $\frac{1}{x^2} + 196x^2$. Utrimque addantur negata et a similibus similia et omnia in x; fit

$$172x = 336x^2 + 24.$$

Quod haud semper possibile est, nisi dimidius coefficiens x in seipsum multiplicatus, minus producto coefficientium x^2 et unitatis, faciat quadratum. At

arithmetocorum_vol_6.png

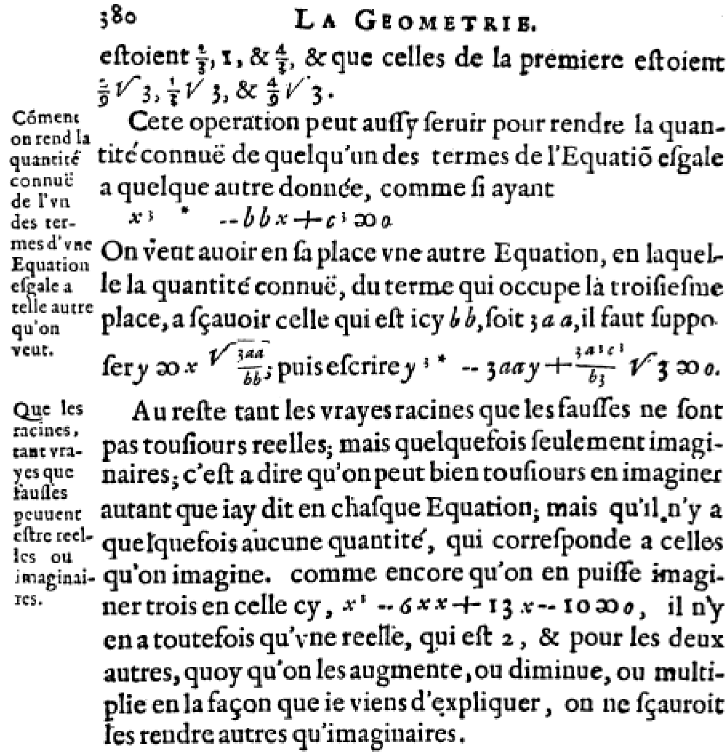
Per esempio, l'equazione di secondo grado:

$$336x^2 - 172x + 24 = 0 \qquad (5)$$

Ha come soluzioni:

$$x = 0.25595 \pm 0.07692\mathrm{i}$$

Nel 1637 anche **René Descartes** nel suo libro **La Géométrie** si questionó il problema delle soluzioni numeri negativi sotto radice quadrata, chiamando tali soluzioni come *immaginarie*.



380 LA GEOMETRIE.

eſtoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere eſtoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Cóment on rend la quantité connuë de l'vn des termes d'vne Equation eſgale a telle autre qu'on veut.

Cete operation peut auſſy ſeruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'Equatiõ eſgale a quelque autre donnée, comme ſi ayant

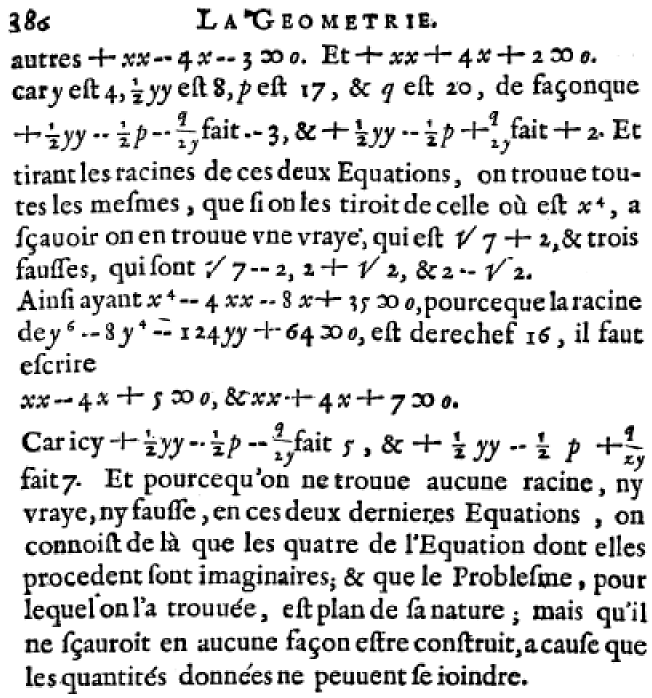
$$x^3 \; * \; -bbx + c^3 \infty 0$$

On veut auoir en ſa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë, du terme qui occupe la troiſieſme place, a ſçauoir celle qui eſt icy bb, ſoit $3aa$, il faut ſuppoſer $y \infty x \sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis eſcrire $y^3 \; * \; -3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.

Que les racines, tant vrayes que fauſſes peuuent eſtre reelles ou imaginaires.

Au reſte tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas touſiours reelles; mais quelquefois ſeulement imaginaires; c'eſt a dire qu'on peut bien touſiours en imaginer autant que iay dit en chaſque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui correſponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puiſſe imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui eſt 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne ſçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

descartes.png



386 LA GEOMETRIE.

autres $+xx - 4x - 3 \infty 0$. Et $+xx + 4x + 2 \infty 0$. car y eſt 4, $\frac{1}{2}yy$ eſt 8, p eſt 17, & q eſt 20, de façonque $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait -3, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait $+2$. Et tirant les racines de ces deux Equations, on trouue toutes les meſmes, que ſi on les tiroit de celle où eſt x^4, a ſçauoir on en trouue vne vraye, qui eſt $\sqrt{7}+2$, & trois fauſſes, qui ſont $\sqrt{7}-2$, $2+\sqrt{2}$, & $2-\sqrt{2}$.

Ainſi ayant $x^4 - 4xx - 8x + 35 \infty 0$, pourceque la racine de $y^6 - 8y^4 - 124yy + 64 \infty 0$, eſt derechef 16, il faut eſcrire

$xx - 4x + 5 \infty 0$, & $xx + 4x + 7 \infty 0$.

Car icy $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait 7. Et pourcequ'on ne trouue aucune racine, ny vraye, ny fauſſe, en ces deux dernieres Equations, on connoiſt de là que les quatre de l'Equation dont elles procedent ſont imaginaires; & que le Probleſme, pour lequel on l'a trouuée, eſt plan de ſa nature; mais qu'il ne ſçauroit en aucune façon eſtre conſtruit, a cauſe que les quantités données ne peuuent ſe ioindre.

descartes_2.png

Fu poi nel secolo **XVI** quando, in base agli studi di **Girolamo Cardano** sulle soluzioni di equazioni cubiche in forma depressa che **Leonhard Euler**, nel suo libro **Elements of Algebra**, capitolo XIII sezione **Of Impossible, or Immaginary Quantities** (**LINK** - è possibile comunque scaricare il libro intero) l'unità immaginaria viene matematicamente accettata. Eulero definisce tale unità come:

... neither nothing, nor greater than nothing, nor less than nothing; which constitutes them imaginary, or impossible.

Ad ogni modo ecco il capitolo intero per una lettura diretta:

CHAP. XIII.

Of Impossible, *or* Imaginary Quantities, *which arise from the same source.*

139. We have already seen that the squares of numbers, negative as well as positive, are always positive, or affected by the sign $+$; having shewn that $-a$ multiplied by $-a$ gives $+aa$, the same as the product of $+a$ by $+a$: wherefore, in the preceding chapter, we supposed that all the numbers, of which it was required to extract the square roots, were positive.

140. When it is required, therefore, to extract the root of a negative number, a great difficulty arises; since there is no assignable number, the square of which would be a negative quantity. Suppose, for example, that we wished to extract the root of -4; we here require such a number as, when multiplied by itself, would produce -4: now, this number is neither $+2$ nor -2, because the square both of $+2$ and of -2, is $+4$, and not -4.

141. We must therefore conclude, that the square root of a negative number cannot be either a positive number or a negative number, since the squares of negative numbers also take the sign *plus*: consequently, the root in question must belong to an entirely distinct species of numbers; since it cannot be ranked either among positive or negative numbers.

142. Now, we before remarked, that positive numbers are all greater than nothing, or 0, and that negative numbers are all less than nothing, or 0; so that whatever exceeds 0 is expressed by positive numbers, and whatever is less than 0 is expressed by negative numbers. The square roots of negative numbers, therefore, are neither greater nor less than nothing; yet we cannot say, that they are 0; for 0

ch13_0.jpg

multiplied by 0 produces 0, and consequently does not give a negative number.

143. And, since all numbers which it is possible to conceive, are either greater or less than 0, or are 0 itself, it is evident that we cannot rank the square root of a negative number amongst possible numbers, and we must therefore say that it is an impossible quantity. In this manner we are led to the idea of numbers, which from their nature are impossible; and therefore they are usually called *imaginary quantities*, because they exist merely in the imagination.

144. All such expressions, as $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. are consequently impossible, or imaginary numbers, since they represent roots of negative quantities; and of such numbers we may truly assert that they are neither nothing, nor greater than nothing, nor less than nothing; which necessarily constitutes them imaginary, or impossible.

145. But notwithstanding this, these numbers present themselves to the mind; they exist in our imagination, and we still have a sufficient idea of them; since we know that by $\sqrt{-4}$ is meant a number which, multiplied by itself, produces -4; for this reason also, nothing prevents us from making use of these imaginary numbers, and employing them in calculation.

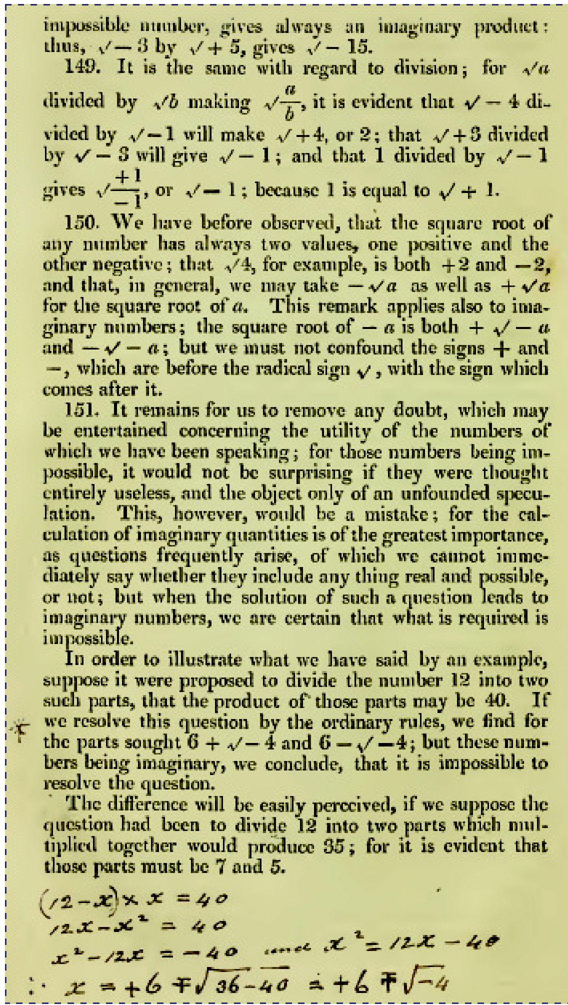
146. The first idea that occurs on the present subject is, that the square of $\sqrt{-3}$, for example, or the product of $\sqrt{-3}$ by $\sqrt{-3}$, must be -3; that the product of $\sqrt{-1}$ by $\sqrt{-1}$, is -1; and, in general, that by multiplying $\sqrt{-a}$ by $\sqrt{-a}$, or by taking the square of $\sqrt{-a}$ we obtain $-a$.

147. Now, as $-a$ is equal to $+a$ multiplied by -1, and as the square root of a product is found by multiplying together the roots of its factors, it follows that the root of a times -1, or $\sqrt{-a}$, is equal to $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{-1}$; but $\sqrt{a}$ is a possible or real number, consequently the whole impossibility of an imaginary quantity may be always reduced to $\sqrt{-1}$; for this reason, $\sqrt{-4}$ is equal to $\sqrt{4}$ multiplied by $\sqrt{-1}$, or equal to $2\sqrt{-1}$, because $\sqrt{4}$ is equal to 2; likewise -9 is reduced to $\sqrt{9} \times \sqrt{-1}$, or $3\sqrt{-1}$; and $\sqrt{-16}$ is equal to $4\sqrt{-1}$.

148. Moreover, as $\sqrt{a}$ multiplied by $\sqrt{b}$ makes $\sqrt{ab}$, we shall have $\sqrt{6}$ for the value of $\sqrt{-2}$ multiplied by $\sqrt{-3}$; and $\sqrt{4}$, or 2, for the value of the product of $\sqrt{-1}$ by $\sqrt{-4}$. Thus we see that two imaginary numbers, multiplied together, produce a real, or possible one.

But, on the contrary, a possible number, multiplied by an

ch13_1.jpg



impossible number, gives always an imaginary product: thus, $\sqrt{-3}$ by $\sqrt{+5}$, gives $\sqrt{-15}$.

149. It is the same with regard to division; for $\sqrt{a}$ divided by $\sqrt{b}$ making $\sqrt{\frac{a}{b}}$, it is evident that $\sqrt{-4}$ divided by $\sqrt{-1}$ will make $\sqrt{+4}$, or 2; that $\sqrt{+3}$ divided by $\sqrt{-3}$ will give $\sqrt{-1}$; and that 1 divided by $\sqrt{-1}$ gives $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, or $\sqrt{-1}$; because 1 is equal to $\sqrt{+1}$.

150. We have before observed, that the square root of any number has always two values, one positive and the other negative; that $\sqrt{4}$, for example, is both $+2$ and -2, and that, in general, we may take $-\sqrt{a}$ as well as $+\sqrt{a}$ for the square root of a. This remark applies also to imaginary numbers; the square root of $-a$ is both $+\sqrt{-a}$ and $-\sqrt{-a}$; but we must not confound the signs $+$ and $-$, which are before the radical sign $\sqrt{}$, with the sign which comes after it.

151. It remains for us to remove any doubt, which may be entertained concerning the utility of the numbers of which we have been speaking; for those numbers being impossible, it would not be surprising if they were thought entirely useless, and the object only of an unfounded speculation. This, however, would be a mistake; for the calculation of imaginary quantities is of the greatest importance, as questions frequently arise, of which we cannot immediately say whether they include any thing real and possible, or not; but when the solution of such a question leads to imaginary numbers, we are certain that what is required is impossible.

In order to illustrate what we have said by an example, suppose it were proposed to divide the number 12 into two such parts, that the product of those parts may be 40. If we resolve this question by the ordinary rules, we find for the parts sought $6+\sqrt{-4}$ and $6-\sqrt{-4}$; but these numbers being imaginary, we conclude, that it is impossible to resolve the question.

The difference will be easily perceived, if we suppose the question had been to divide 12 into two parts which multiplied together would produce 35; for it is evident that those parts must be 7 and 5.

$(12-x)\times x = 40$

$12x - x^2 = 40$

$x^2 - 12x = -40$ and $x^2 = 12x - 40$

$\therefore\ x = +6 \mp \sqrt{36-40} = +6 \mp \sqrt{-4}$

ch13_2.jpg

Fino ad allora si ebbero molti dubbi sulle soluzioni delle equazioni cubiche, dato che in molti casi ci si trovava almeno un coefficiente negativo sotto radice nella soluzione finale.

Fu più tardi, sempre nel secolo **XVI**, che come conseguenza al teorema fondamentale dell'algebra (dimostrato da **Gauss** nella sua tesi dottorale del 1799), il quale asserice che ogni polinomio di grado n ammette n soluzioni, il concetto di numero complesso divenne necessario.

Cenno sulle notazioni

Esistono e si usano varie notazioni dell'unità immaginaria:

$$\mathrm{i},\ i,\ j,\ \mathrm{j}$$

La prima notazione dovrebbe essere quella più corretta, mentre per quanto riguarda la seconda, in analisi dei circuiti potrebbe essere confusa con una corrente, ed ecco perché la convenzione usata appunto in questa rama di studio è la lettera **j** invece della lettera **i**.

Personalmente non mi piacciono le notazioni in corsivo, perché poi si tende a confonderle con delle variabili, come appunto il caso di i, ed è per lo stesso motivo per cui si dovrebbe scrivere la notazione di derivata con la **d** tonda (dato che è un operatore), i.e.:

$$\mathrm{d}x$$

e non

$$dx$$

Quest'ultima, in un espressione complicata e lunga potrebbe facilmente essere confusa con una moltiplicazione di variabili.

Infine, come disse il professore di meccanica applicata del nostro amico **lillo**:

"Se vuoi distinguere un elettrico da tutti gli altri, guarda come scrive l'unità immaginaria"

Ed aveva ragione.

i ≠ √(-1)

Arrivati a questo punto possiamo già scrivere perché

$$\mathrm{i} \neq \sqrt{-1} \qquad (5)$$

raccogliendo un po' di informazioni e risposte di **PietroBaima** e **DirtyDeeds** come preannunciato in precedenza.

Nel thread **Amici immaginari dal comportamento discutibile**, il nostro amico **Ianero** al messaggio [1] chiese quali delle due equazioni:

$$i\sqrt{-3} = i \cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} \qquad (6)$$
$$i\sqrt{-3} = \sqrt{-3i^2} = \sqrt{3} \qquad (7)$$

fosse corretta. Da qui si possono immaginare gli errori che porta usare l'equazone **(1)**.

Risposta di DirtyDeeds:

In campo complesso l'equazione $w^2 + z = 0$ definisce una relazione su $\mathbb{C}$. Ora *qualunque* relazione può essere ristretta a una funzione (en passant, è un assioma della teoria degli insiemi, l'assioma di scelta), ma ci possono essere restrizioni differenti. Quando scrivete

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

state pensando a $\sqrt{-1}$ come a una funzione: nelle manipolazioni fatte in [1] il problema nasce nel considerare per le varie radici che compaiono restrizioni differenti. E' come se in campo reale avessi una relazione R e da questa ottenessi due funzioni f_1 e f_2, però per pigrizia le chiamassi entrambe f: chiaro che allora è un attimo dimostrare che

$$f_1^2 = f^2 = f_1 f_2$$

da cui $f_1 = f_2$. Vi ricorda mica $1 = -1$?

Nei complessi non c'è proprio *una funzione* $\sqrt{\cdot}$. C'è una relazione, che puoi restringere a diverse funzioni. Ma se tutte le funzioni le denoti con lo stesso simbolo $\sqrt{\cdot}$ capisci che capita quello che ti ho fatto vedere in [30].

Prendiamo ciò che hai scritto in [1]:

$$\mathrm{i}\sqrt{-3} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}\sqrt{3} = \mathrm{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

Qui hai considerato

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\mathrm{i}$$

Invece, in

$$\mathrm{i}\sqrt{-3} = \sqrt{-3\mathrm{i}^2} = \sqrt{3}$$

hai implicitamente considerato

$$\sqrt{-3} = -\sqrt{3}\mathrm{i}$$

Nel campo dei numeri complessi il simbolo $\sqrt{z}$ denota una qualunque delle due soluzioni dell'equazione $z^2 + 1 = 0$: non si può trattare come una funzione a meno che non si consideri una specifica soluzione in modo coerente dappertutto.

[/R]

Nota aggiuntiva di PietroBaima, da qui:

La cosa su cui bisogna stressare è che, in campo complesso, la funzione $\sqrt{\cdot}$ è priva di significato e infatti è pieno il web di quei giochetti dove si parte da una qualche radice di i e si arriva ad un non senso. La matematica è però sempre coerente, perchè il matematico vede il non senso fin dall'inizio di quei giochetti ;-)

Per esempio, a me piace questa:

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{\mathrm{i}}$$

la ragione per cui mi piace è che c'è un errore diverso in ogni uguale che è scritto:

- i non è la radice quadrata di -1.
- le operazioni sotto radice si possono fare solo con numeri positivi. E' sbagliato scrivere $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{-9}{-3}}$. A denti stretti dico che qualche volta si fa come stratagemma (esempio nella formula risolutiva delle equazioni di terzo grado, ma bisogna fare una attenzione infinita. Infatti quella formula è superata dal calcolo complesso, che non era disponibile all'epoca da Tartaglia. Meglio considerarlo come errore e basta.)
- non è possibile dividere una radice in parti che contengono numeri negativi. E' sbagliato scrivere $\sqrt{\frac{-9}{-3}} = \frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-3}}$

Infatti il risultato è un non senso, cioè $\mathrm{i} = \frac{1}{\mathrm{i}}$, cioè $\mathrm{i}^2 = 1$.

[/R]

Nel corso del thread linkato, sempre grazie a un contributo di **PietroBaima** abbiamo anche imparato che l'equazione

$$\mathrm{i}^2 = -1 \qquad (8)$$

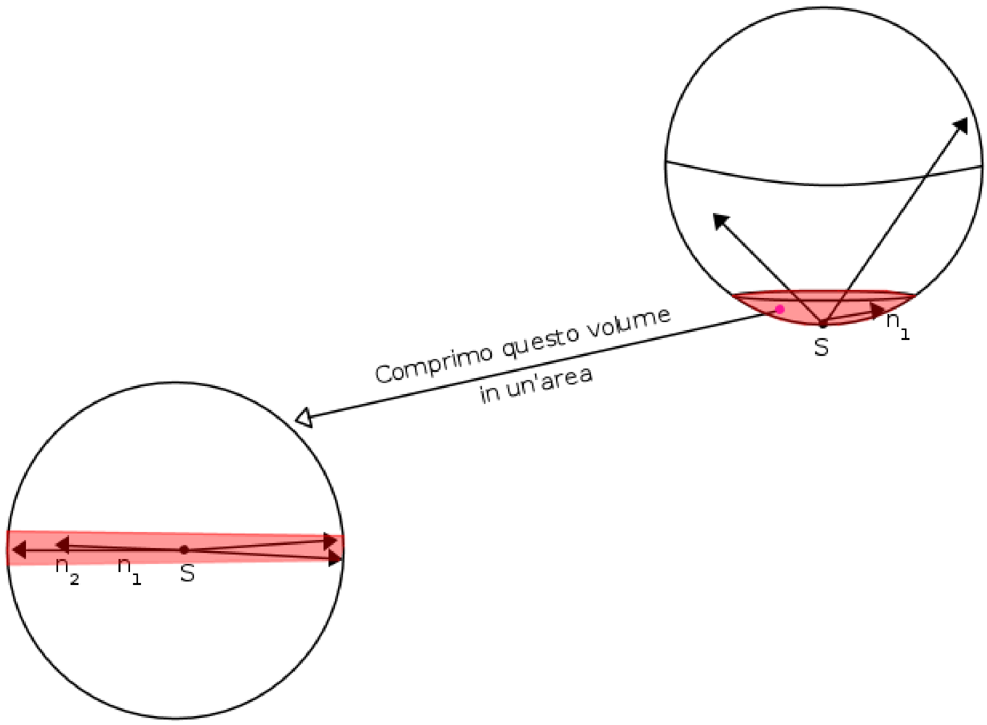
vale solo se i numeri non escono dal piano (!). Questo vuol dire che questa ultima uguaglianza può creare gli stessi problemi dell'uguaglianza **(1)**...

Ecco quindi il notevole contributo del nostro PietroBaima:

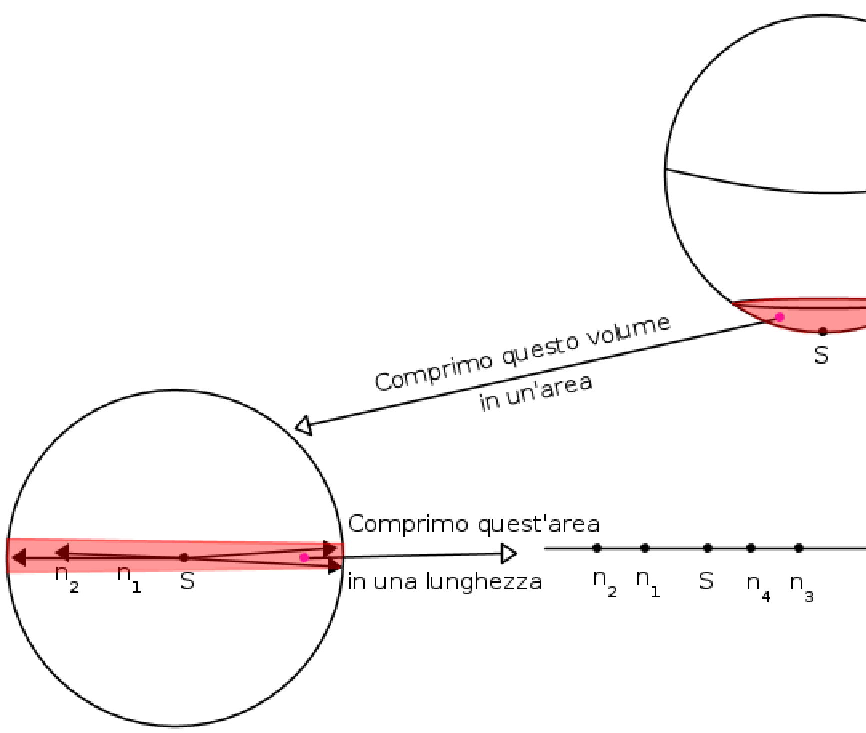
Usando i quaternioni potrebbe non essere vero e creare gli stessi problemi che crea la radice di un numero negativo. Il problema è che, in quel caso, è proprio il concetto di "segno meno" ad avere problemi...

Immaginiamo i numeri come punti di una sfera.
Scegliamo di esprimere tutti i numeri come vettori il cui punto di origine è il "polo sud" della sfera, per esempio.

Supponiamo che, a causa di una mia scelta strana, mi muova in un piccolo intorno del polo sud.
Lo spazio mi sembrerebbe un cerchio piatto, circa.
Ho quindi ridotto le dimensioni a 2.



Se poi mi muovessi in un piccolo intorno di un diametro di questo cerchio arriverei a definire una lunghezza.



Ho definito quindi i numeri reali come una *approssimazione* dei numeri complessi, che vale finché non mi muovo *troppo* lontano dall'intorno che ho definito come soddisfacente.
Ma si sa, ai matematici queste cose approssimate non piacciono.
Infatti la realtà è che la sfera non solo ha infinite dimensioni, ma ha anche un raggio infinito.
Questo fa si che il segmento sul quale avevo ristretto lo spazio sulla sfera (che era il diametro del cerchio ed una corda della sfera) sia in realtà una retta, ovviamente di lunghezza infinita, che definisce tutti i numeri reali.

Ho inventato quindi un modo per creare infinite estensioni dei numeri reali, non solo quelli complessi, ma anche altri, di dimensione via via sempre più grande: gli insiemi di **Cayley–Dickson** che definiscono numeri **ipercomplessi**.

Facciamo un esempio. Prendiamo un numero reale:

$$x$$

Per "uscire" dalla retta sul quale giace, devo considerarlo come un vettore (cosa che lui è già, ma è un vettore così piccolo che mi sembra un punto, in seguito al nostro ragionamento) e "dotarlo" di una dimensione in più.

Uso quindi un versore i per "aumentare" la sua dimensione e sostituisco, rimpiazzo, cambio il "numero" x con il "vettore" z .

$$z = x + \mathrm{i}y$$

Questa operazione è indolore?
Come abbiamo visto, no, perché devo fare attenzione a fare in modo di non uscire dalle semplificazioni che ho adottato. Tutte le paranoie sulla radice quadrata di meno uno arrivano da qui.
A questo punto, però, posso continuare a "sostituire" x. Se aumento nuovamente di dimensione x, devo farlo anche per y, altrimenti non arriverò ad alcuna soluzione.
Le dimensioni dei numeri sono sempre a coppie (dalla dimensione 2 dei numeri complessi si passa a dimensione 4, poi 8, poi 16 ecc, a meno di considerare un numero di dimensioni non intero, oppure reale, oppure complesso, oppure ipercomplesso, ma lasciamo perdere).
Proviamo.
Devo fare attenzione a sostitituire bene.
Voglio sostuituire, in

$$z = x + \mathrm{i}y$$

x e y con due numeri complessi.

Pongo quindi:

$$x = a + \mathrm{j}b$$

e

$$y = c + \mathrm{j}d$$

Faccio notare che per x e y ho usato il versore j e non i perché sto abbandonando il piano definito da 1 e i (il piano dei complessi) e quindi mi serve un nuovo versore. Sostituiamo:

$$q = (a + \mathrm{j}b) + \mathrm{i}(c + \mathrm{j}d)$$
$$q = a + \mathrm{j}b + \mathrm{i}c + \mathrm{ij}d$$

Ohibò. E adesso come faccio a calcolare ij ? beh, diciamo che potrei **annoiarvi parecchio**...
Una spiegazione intuitiva è quella di porre ortogonalmente due piani complessi tra loro e osservare la direzione del versore risultante dalla composizione vettoriale dei due precedenti. Quello che si ottiene è un versore perpendicolare ad entrambi (come nel prodotto vettoriale) che chiameremo k. Abbiamo quindi trovato il quarto versore **1** ijk e definito quindi il nostro spazio a quattro dimensioni.

$$q = a + \mathrm{j}b + \mathrm{i}c + \mathrm{k}d$$

Il grosso, immenso, infinito *pain in the ass* che si ha è che

$$\mathrm{ij} \neq \mathrm{ji}$$

In generale, quindi, perdiamo la commutatività del prodotto. In questo caso bisogna fare attenzione a fare il quadrato di i, j e k.

Continuando arriverei ad uno spazio ad 8 dimensioni, per i quali, purtroppo non vale nemmeno più la commutatività della somma. Se continuo a 16 perdo anche l'associatività.

[/R]

Anche il nostro **MauroBottizzo**, in **un thread** aperto dopo la pubblicazione di questo articolo, si chiede:

[D] ... mi sembra di intuire che il messaggio sia questo: la funzione di radice ha senso solo se il sistema numerico usato è scalare, appiattito in un suo mondo monodimensionale. Ha senso parlare di radice per i classici numeri scalari. **[/D]**

Risposta di **PietroBaima**:

In pratica sì, anche se un matematico ti direbbe di no. :mrgreen: Cerco di spiegarmi senza tirare dentro troppa matematica.

Quando si è introdotto il simbolo di radice quadrata si voleva trovare la funzione inversa della funzione x^2.

Niente di male, peccato che l'inversa di quella funzione non c'è, nel senso che non è una funzione.

Cosa voglio dire? Se mi chiedo qual è quel numero che elevato al quadrato fa 5 la risposta corretta è che la domanda non ha senso, perché non esiste un solo numero che elevato al quadrato faccia 5, ma ne esistono ben due, uno positivo e uno negativo. Quindi non è possibile definire univocamente una funzione che permetta di rispondere alla richiesta.

Quello che si può fare è operare una restrizione, cioè assumere che la funzione inversa del quadrato sia quel valore, **assunto positivo**, che elevato al quadrato permetta di tornare al numero di partenza.

A questo punto mi invento un simbolo per indicare la radice e dico che la radice di 5 vale $\sqrt{5}$. Con questa scrittura intendo dire: il valore $\sqrt{5}$ indica quel numero che elevato al quadrato fa 5. Non nomino e non considero altre soluzioni.

Ora, in campo reale, posso forzare un po' la mano alla funzione dicendo che esiste anche il valore $-\sqrt{5}$ che elevato al quadrato fa 5. Quello a cui bisogna fare attenzione però è che a rigore sto considerando una funzione diversa da quella di prima. In campo reale non è un problema perché questa imprecisione, chiamiamola così, non ha mai conseguenze gravi.

Quando però passo in campo complesso questo non è più vero, tanto è vero che i matematici sono meno inclini a parlare di funzioni e preferiscono parlare di relazioni complesse. Terminologia a parte, se facessi in campo complesso quello che faccio in campo reale confondendo le due radici farei degli errori. In campo complesso quando parlo di radice di z intendo sempre una qualunque delle soluzioni della equazione $z^2 + q = 0$, che non è $z = \sqrt{q}$, a meno che q non sia reale (soluzione ovvia) ma è quell'insieme di soluzioni più vasto che possono dare i numeri complessi, esprimendo q in forma polare.

L'unica operazione corretta resta l'elevamento al quadrato, per cui è corretto dire, in campo complesso che $i^2 = -1$.

Se uscissi dal piano e usassi i quaternioni, non sarebbe nemmeno più corretto dire che $i^2 = -1$ \quad, perché dovrei usare Levi-Civita per indicare i versori di quello spazio.

Per farla breve in questo caso sarebbe solo più corretto dire che $i \cdot i = -1$, dove bisognerebbe anche definire molto bene quel prodotto. In generale perdo la proprietà commutativa del prodotto (a * b diventa diverso da b * a, SIGH). Questo ha la conseguenza drammatica l'equazione $q^2 + 5 = 0$, per esempio, abbia un numero infinito di soluzioni.

Con gli ottonioni le cose sono ancora più complicate perché perdo anche la commutatività della somma ($z + w$ è diverso da $w + z$, 🙁) e per i sedenioni (numeri ipercomplessi a 16 dimensioni) le cose diventano ingestibili, tanto che questa matematica è stata lentamente superata da algebre più potenti.

Significato fisico dei numeri complessi

Quasi sicuramente, qualsiasi persona che ha usato l'unità immaginaria si sarà chiesto quale è il significato e concreto dei numeri complessi. In effetti è una domanda molto interessante che chissà non trova una risposta immediata dentro di noi.

Ultimamente è stato il nostro amico **Piercarlo** a chiederlo nel suo thread **Qual è il significato FISICO dei numeri complessi?**.

Non è stato l'unico. Anche **g26** aveva aperto un thread interessante, nel quale **PietroBaima** ha dato la sua ottima risposta.

Risposta di PietroBaima:

Per rispondere invece alla domanda dell'OP, credo che ci si stia chiedendo cos'è un numero e a cosa serve.

Naturalmente tutti i concetti astratti incontrano, nella nostra mente, la necessità di una risposta concreta, ma per lo più queste domande sono errate.
Voglio dire che ci si potrebbe chiedere "a cosa serve una ellisse?".
Un meccanico potrebbe rispondere che serve per fare un eccentrico per azionare un meccanismo di punteria, Keplero potrebbe rispondere che serve per descrivere il moto dei pianeti, ecc...

In definitiva la domanda "cos'è questo?" **in matematica incontra sempre la risposta "è un concetto astratto che può essere applicato dovunque tu ne abbia bisogno"**.

[/R]

Nel thread aperto da **Piercarlo** anche il nostro **IsidoroKZ** ha dato il suo contributo con una risposta molto interessante. Eccola:

Risposta di IsidoroKZ:

Significato fisico dei numeri complessi? Nessuno! E non e` uno scherzo :)

Molto spesso in fisica i numeri derivano da misure, e non sono solo numeri, sono grandezze fisiche, e direi che tutte el grandezze fisiche che si possono misurare danno valori non complessi.

Ad esempio io peso j50 kg? Sì, in un altro universo. Qui la mia massa è abbastanza più grande di 50 kg, e quindi se immagino di pesare solo 50 kg forse diventano j50 kg.Una qualunque grandezza fisica non mi pare possa essere complessa, a meno che... non si applichi qualche trasformazione su di essa.

Prendiamo una tensione, che e` una grandezza reale, ne facciamo una trasformata di Fourier, ed ecco saltare fuori delle grandezze complesse, enormemente piu` comode che non usare sempre le grandezze originali, non trasformate.

La trasformata di Fourier di una tensione ha le dimensioni di una tensione moltiplicata per un tempo, ci si fanno su calcoli e analisi dimensionale... ma e` solo una rappresentazione comoda di una grandezza reale.

[/R]

Addendum: la radice quadrata in campo complesso

Sempre nel suo thread, il nostro **Piercarlo** ha sollevato una questione importante, la quale ha a che vedere con l'uguaglianza **(1)**, a partire da una risposta di **PietroBaima**:

Risposta di PietroBaima:

Purtroppo per i numeri complessi anche il modulo cambia di significato.DirtyDeeds diceva la cosa più corretta: in campo complesso parlare di radice non ha senso.

[/R]

E quindi **la domanda che segue questa ultima risposta è:**

Ma se il campo reale è solo un caso particolare del campo complesso, cosa se ne dovrebbe pensare di questo "non ha senso"? Che l'estrazione di radice è valida solo nel campo reale?

[/D]

Risposta di DirtyDeeds:

Non è che l'estrazione di radice sia valida solo in campo reale. Il punto cruciale, però, è che la notazione $\sqrt{}$ è una notazione *funzionale* e presuppone l'esistenza di un *unico* numero che abbia determinate caratteristiche. In particolare, in campo reale si dimostra che dato $x \geq 0$ esiste un *unico* $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$. Ciò implica che esista una funzione dell'insieme dei reali positivi su se stesso che abbiamo deciso di denotare con $\sqrt{}$.

Nel campo dei complessi, ma non solo in quello, le cose si fanno più complicate perché non c'è un modo semplice di definire una *funzione* radice quadrata in modo analogo a quanto fatto nei reali. Si dice allora che il simbolo i denota *una* radice quadrata di -1, con il significato che $\mathrm{i}^2 = -1$.

[/R]

Alla quale si aggiunge poi la notevole risposta di PietroBaima:

La domanda è interessante.
Tutto deriva dal fatto che si tende sempre ad estendere allegramente le operazioni da un campo ad un altro, senza fare le verifiche dovute.

Quando, in campo reale, devo risolvere l'equazione

$$x^2 - 1 = 0$$

scopro che essa è verificata per la coppia di valori +1 e -1.

perché questo succede? perché si hanno due valori?
La risposta è ovvia: perché quella parabola taglia l'asse delle x in due punti e tali sono le soluzioni.

Benissimo, è corretto.

Posso certamente anche dire che le soluzioni di

$$x^2 - 1 = 0$$

sono in realtà date dalla funzione inversa.

Niente di obiettabile, basta invertire la funzione **come si deve**.

La funzione

$$x^2 - 1 = f(x)$$

ha un punto a derivata nulla in zero. Il buon vecchio Dini ci dice che abbiamo un punto di non invertibilità locale.

Traslamoci nel punto di non invertibilità, per centrarci rispetto ad esso.

$$f(x) = x^2 - 1$$

definisco

$$\begin{gathered} r = x - 1 \\ s = x^2 \end{gathered}$$

e inverto, a costo di essere eccessivamente pesante:

$$\begin{gathered} f = r \circ s \\ f^{-1} = (r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} \\ s^{-1} = \pm\sqrt{x} \\ r^{-1} = x + 1 \\ f^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} = \pm\sqrt{x+1} \end{gathered}$$

avendo la funzione inversa e volendo calcolare

$$f(x) = 0$$

ho che

$$x = f^{-1}(0)$$

cioè

$$x = \pm 1$$

Fin qui nulla di male. Siamo stati eccessivamente cauti e pedanti, ma nessuno ci può dire che abbiamo sbagliato.

Vediamo adesso di fare lo stesso ragionamento con

$$x^2 + 1 = 0$$

.

Quella parabola non taglia mai l'asse delle x, per cui il primo modo di trovare una soluzione fallisce prima di cominciare.
Non ci sono soluzioni.
Non ce ne sono, fine.
Ragioniamo nuovamente sull'inversa, quindi.
In fondo non dobbiamo che rifare la strada di prima...

$$g(x) = x^2 + 1$$

$g(x)$ ha problemi in $x = 0$, come prima...

definisco quindi

$$p = x + 1$$
$$s = x^2$$

e inverto, come prima:

$$g = p \circ s$$
$$g^{-1} = (p \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ p^{-1}$$
$$s^{-1} = \pm\sqrt{x}$$
$$p^{-1} = x - 1$$
$$g^{-1} = s^{-1} \circ p^{-1} = \pm\sqrt{x - 1}$$

avendo la funzione inversa e volendo calcolare

$$g(x) = 0$$

ho che

$$x = g^{-1}(0)$$

cioè OUCH! il dominio dell'inversa è per $y > 1$, non posso porre $y = 0$!!

Cosa è successo? Non ho potuto fare la radice quadrata come prima? No, semplicemente non ho avuto modo di definirla correttamente in modo tale per cui mi permettesse di risolvere il problema. Non è nel dominio, non posso usarla!

Quello che devo fare è considerare correttamente il problema:

$$z^2 + 1 = 0$$
$$z^2 = -1$$

il numero -1 in campo complesso è un **vettore**, pari a

$$w = -1 + i \cdot 0$$

, che può essere rappresentato in forma polare come:

$$w = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}2k\pi}$$

con

$$k \in \mathbb{Z}$$

Per cui ci sono infinite soluzioni a quella equazione, che valgono:

$$z^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi + \mathrm{i}2k\pi}$$
$$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2 + \mathrm{i}k\pi}$$

Si nota che le soluzioni linearmente indipendenti sono solo due e precisamente:

$$z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \qquad k = 0$$
$$z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2 + \mathrm{i}\pi} \qquad k = 1$$

se $k = 3$ la soluzione coincide con $k = 0$, con $k = 4$ coincide con $k = 1$ ecc...

$$z_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$$
$$z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2 + \mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{i}$$

Può sembrare una differenza sottile, ma risolvendo

$$z^3 + 1 = 0$$

si nota che le soluzioni sono 3, di cui solo una reale.

Inoltre si vede come la radice non sia definita, leggerezza che spesso porta ad errori.

[/R]

Conclusioni

Eccoci qui, al capolinea di questa piccola raccolta di risposte.

Redigere l'articolo è stato abbastanza facile, io (**simo85**) come già detto prima, mi sono solo occupato di prendere certe risposte ed incorporarle nell'articolo. Ho cercato di formattarle al meglio.

Tutto il resto lo hanno fatto **PietroBaima** e **DirtyDeeds**, quindi, in caso di complimenti e ringraziamenti, questi dovranno essere fatti prima di tutto a loro. È merito loro se è stato possibile scrivere questo articolo riassuntivo.

simo85 ha solo voluto riunire queste interessantissime informazioni e renderle di facile consultazione all'interno della community, nella migliore maniera possibile.

Spero di essere riuscito nell'intento.

Nel mio piccolo, per dovere e bontà avrei voluto condividere *la proprietà* di questo articolo assieme a loro. Purtroppo non ho ricevuto nessuna conferma né risposta finale, quindi ho preferito aspettare senza insistere. Ho poi deciso di pubblicare definitivamente l'articolo, buttarlo via non mi sembrava assolutamente giusto, spero di non aver fatto nulla di male, e che questo piccolo grande lavoro possa essere apprezzato all'interno della community.

Qualsiasi suggerimento utile a migliorare l'articolo è come sempre ben gradito.

Grazie di tutto, in particolare ad **admin**, **PietroBaima** e **DirtyDeeds**.

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Simo85:iarticle"