tipu91

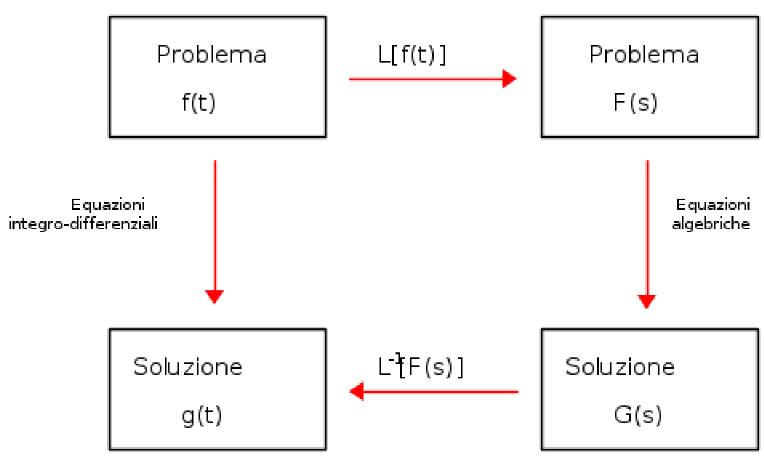
STUDIO DEL TRANSITORIO - LAPLACE "SEPARATO"

8 March 2013

Introduzione

Lo studio dei circuiti in regime dinamico (non a regime) si effettua tramite la risoluzioni di equazioni (o sistemi di equazioni)integro-differenziali, che spesso possono risultare “difficili” o quanto meno laboriose. Nel caso di circuiti in regime stazionario sinusoidale, ci viene incontro la trasformata fasoriale, che ci permette di risolvere circuiti dinamici con operazioni su vettori e numeri complessi. Questo metodo di analisi dei circuiti cade in difetto se si studiano circuiti con andamenti a-periodici, o nello studio dei transitori.
Il TRANSITORIO è un lasso di tempo in cui l’energia del sistema deve adattarsi a nuove condizioni di funzionamento, dovute per esempio, ad una modifica topologica della rete o più in generale ad una perturbazione.
In questo caso, la TRASFORMATA DI LAPLACE ci permette distudiare sistemi di equazioni integro-differenziali, come equazioni algebriche nel dominio complesso.

Trasformata di Laplace



La trasformata di Laplace ci permette di “trasformare” unsistema di equazioni integro-differenziali nel dominio del tempo ($t \in \mathbb{R}$), in equazioni algebriche nel dominio di Laplace ($s \in \mathbb{C}$). Riguardo alla trasformata di Laplace non mi dilungherò molto, perché nel sito si trovano già articoli (come questo Laplace ..... in pratica) dove viene spiegata approfonditamente, quindi do per scontato che un lettore che si cimenta con l'utilizzo del metodo da me illustrato, sia già a conoscenza della trasformata di Laplace e della sua applicazione ai circuiti. Mi limiterò a ricordare i vantaggi che ci porta questo "strumento":

VANTAGGI:

-Risolvere un sistema di equazioni algebriche è più facile che risolvere un sistema di equazioni differenziali.

-Si tiene automaticamente di conto delle condizioni iniziali nell'operazione di trasformazione.

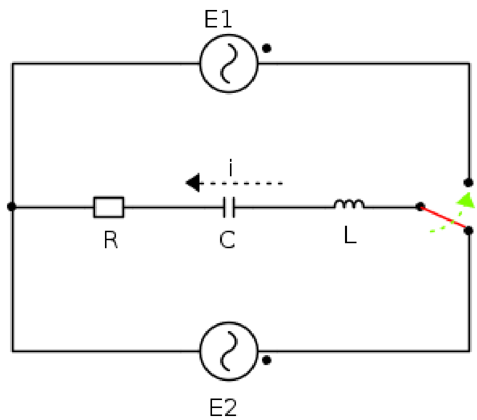
SVANTAGGI:

-Determinare il sistema equivalente nel dominio di Laplace non sarebbe semplice, in quanto la definizione di trasformata implica conti non banali.

Quest'ultimo punto però, può essere bypassato dal fatto che in elettrotecnica si utilizzano funzioni standard per le quali le trasformate sono già tabellate.
A questo punto non ci resta che entrare nel vivo della "spiegazione".

Laplace "separato" e lo studio dei transitori

Lo studio dei transitori che si verificano in un circuito lineare come conseguenza di una perturbazione con regime stazionario, può eseguirsi convenientemente in base al teorema di SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI ($X(t) = X_t(t) + X_p(t)$), considerando separatamente la componente della risposta STAZIONARIA ($X_S(t)$)e quella TRANSITORIA ($X_t(t)$). La componente transitoria (come si può intuire anche dal nome), non è una risposta che persiste nel tempo, ma si può considerare estinta dopo un breve lasso di tempo (TRANSITORIO) ed è il risultato della reazione del circuito alla perturbazione, o meglio, la componente che permette alle grandezze di stato energetiche della rete di passare gradualmente (senza discontinuità, come vuole il principio di conservazione dell'energia) dal funzionamento precedente alla perturbazione a quello relativo al successivo regime stazionario. Si consideri il circuito in figura:



nell'istante $t = 0$ viene sottoposto ad una perturbazione: viene disattivato il generatore $E2$, sostituito dal generatore $E1$. Per la procedura di trasformazione nel dominio di Laplace, è necessario ricavare le condizioni iniziali sugli elementi reattivi della rete(condensatori, induttori ed induttori mutuamente accoppiati), ma in questo caso per facilitare la spiegazione diamo per note le condizioni iniziali (per $t = 0$)sugli elementi reattivi: la tensione sul condensatore $v_c(t)\mid_{t=0}= v_c(0)$ e la corrente sull'induttore $i_L(t)\mid_{t=0}= i_L(0)$. A questo punto scriviamo l'equazione di equilibrio del circuito(dopo il cambio di generatore) applicando il secondo principio di Kirchhoff all'unica maglia del circuito:

$$RI(s) + LsI(s) - Li_L(0) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v_c(0)}{s} = E_1(s)$$

In questa equazione $I(s)$ è la L-trasformata della corrente di risposta totale, che, come detto precedentemente, può essere scomposta nella componente stazionaria $I_S(s)$ e in quella transitoria $I_t(s)$. Inoltre possiamo sommare e sottrarre al primo membro i generatori fittizi delle condizioni iniziali imposte dalla sollecitazione (quelli della risposta a regime) $i_L - s(0)$ e $v_C - s(0)$,ottenendo due equazioni:

$$RI_t(s) + RI_s(s) + LsI_t(s) + LsI_s(s) - Li_L(0) + Li_{L-s}(0) - Li_{L-s}(0) +$$

$$+ \frac{1}{Cs}I_s(s) + \frac{1}{Cs}I_t(s) + \frac{v_c(0)}{s} - \frac{v_{c-s}(0)}{s} + \frac{v_{c-s}(0)}{s} - E_1(s) = 0$$

dove i termini in rosso sono relativi alla risposta transitoria, mentre quelli in nero, sono i termini relativi alla sollecitazione a regime stazionario, che sommate sono uguali a zero (verificano l'equilibrio del circuito). Quindi possiamo separare le due risposte e scrivere due equazioni diverse: una rappresentante la risposta TRANSITORIA e una quella STAZIONARIA.

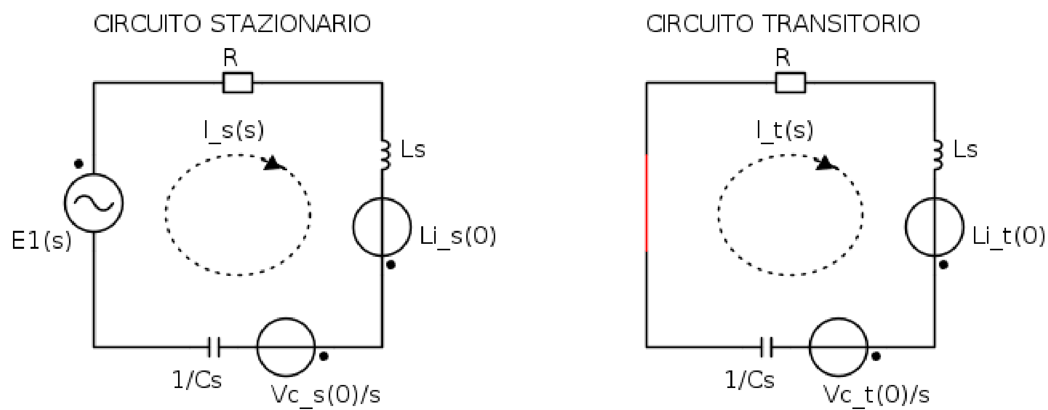
$$\begin{cases} RI_s(s) + LsI_s(s) - Li_{L-s}(0) + \frac{1}{Cs}I_s(s) + \frac{v_{c-s}(0)}{s} = E_1(s) \\ RI_t(s) + LsI_t(s) - L[i_L(0) - i_{L-s}(0)] + \frac{1}{Cs}I_t(s) + \frac{[v_c(0) - v_{c-s}(0)]}{s} = 0 \end{cases}$$

Dove i termini tra parentesi quadre rappresentano le condizioni iniziali transitorie, secondo le condizioni imposte dalla continuitàdelle grandezze:

$$i_{L-t}(0) = i_L(0) - i_{L-s}(0)$$

$$v_{c-t}(0) = v_c(0) - v_{c-s}(0)$$

La prima delle due equazioni rappresenta l'equazione risolutiva del circuito in regime stazionario (quando il transitorio si considera estinto), mentre la seconda rappresenta il circuito che, alimentato solamente da generatori fittizi di condizioni transitorie, avrà come risposta la parte transitoria da noi cercata. Queste due equazioni corrispondono all'equilibrio dei due circuiti L-trasformati riportati qui di seguito:



Questa scomposizione è un artificio puramente matematico,perché in realtà si possono notare gli effetti della risposta transitoria, ma non si può "isolare" quest'ultima.

Quindi molti di voi si chiederanno **"dove sta la comodità in un metodo che dato un** circuito, per trovarne la risposta, ci impone di studiarne 3 diversi"? Il vantaggio sta nel fatto che le condizioni iniziali (prima della perturbazione)e quelle a regime stazionario (una volta svanito l'effetto transitorio) possono essere calcolate con i metodi di risoluzione classici (per esempio con l'uso dei fasori)perché sia prima che "molto" dopo la perturbazione il circuito si trova in regime stazionario.

RIASSUMENDO:

1)Si studia il circuito per $t < 0$ trovando le condizioni iniziali sugli elementi reattivi prima della perturbazione;

2) Si studia il circuito a regime $t \gg 0$ e si trovano sia le condizioni iniziali di regime, sia (se richiesto dal problema)la risposta a regime $X_p(t)$;

3) Si ricavano le condizioni iniziali transitorie(secondo la relazione vista in precedenza);

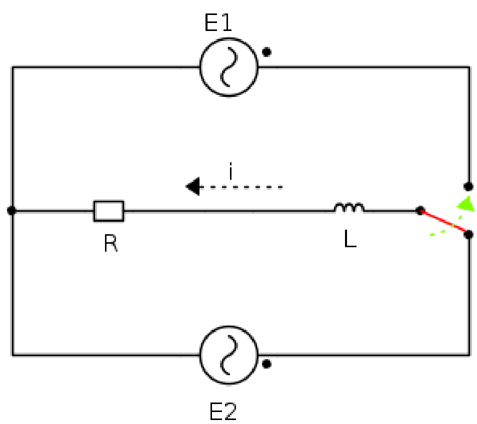
4) Si "costruisce" il circuito L-trasformato della risposta transitoria, disattivando tutti i generatori indipendenti lasciando attivi quelli di condizioni iniziali transitorie;

5) Si trova la soluzione transitoria $X_t(t)$;

6) Si scrive la risposta completa del circuito come $X(t) = X_t(t) + X_p(t)$

Vediamo un esempio per capire meglio!!

Esempio



dato il circuito in figura, dove l'interruttore per $t = 0$ disattiva il generatore 2 e attiva il generatore 1, calcolare la corrente che scorre nel ramo R-L per $t > 0$. I dati del problema sono:

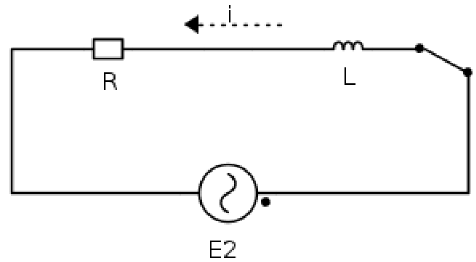
$R = 2\Omega$

$L = 10\,\mathrm{mH}$

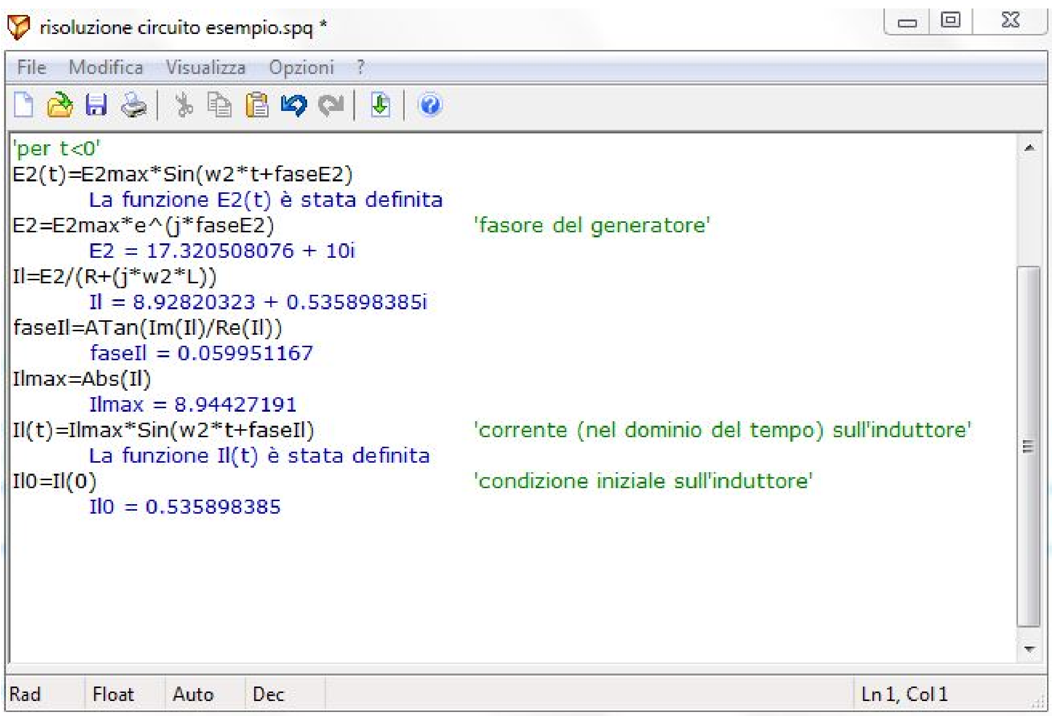
$E1(t) = 5\,\mathrm{V}$

$E2(t) = 20\sin\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{V}$

Iniziamo, come detto nel paragrafo precedente, col calcolare le condizioni iniziali sugli elementi reattivi, prima della perturbazione, ovvero quando il circuito è alimentato solamente dal generatore 2 (circuito monomaglia):

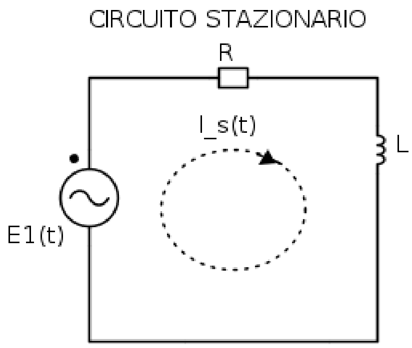


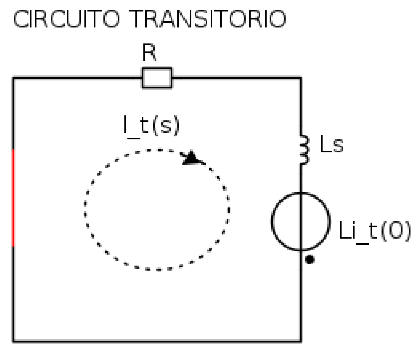
Il circuito in questione si studia con i metodi classici (in questo caso nel dominio dei fasori perché la sollecitazione è sinusoidale) perché si presuppone che prima della perturbazione il circuito sia a regime. Applicando la legge di Ohm, si ricava la corrente che scorre nel ramo R-L che, naturalmente, è la stessa che scorre nell'induttore. Quindi riportando il risultato (il fasore della corrente) nel dominio del tempo, abbiamo la corrente in funzione del tempo ($I_L(t)$) che calcolata per $t = 0$ ci dà la CONDIZIONE INIZIALE sull'induttore prima della perturbazione.



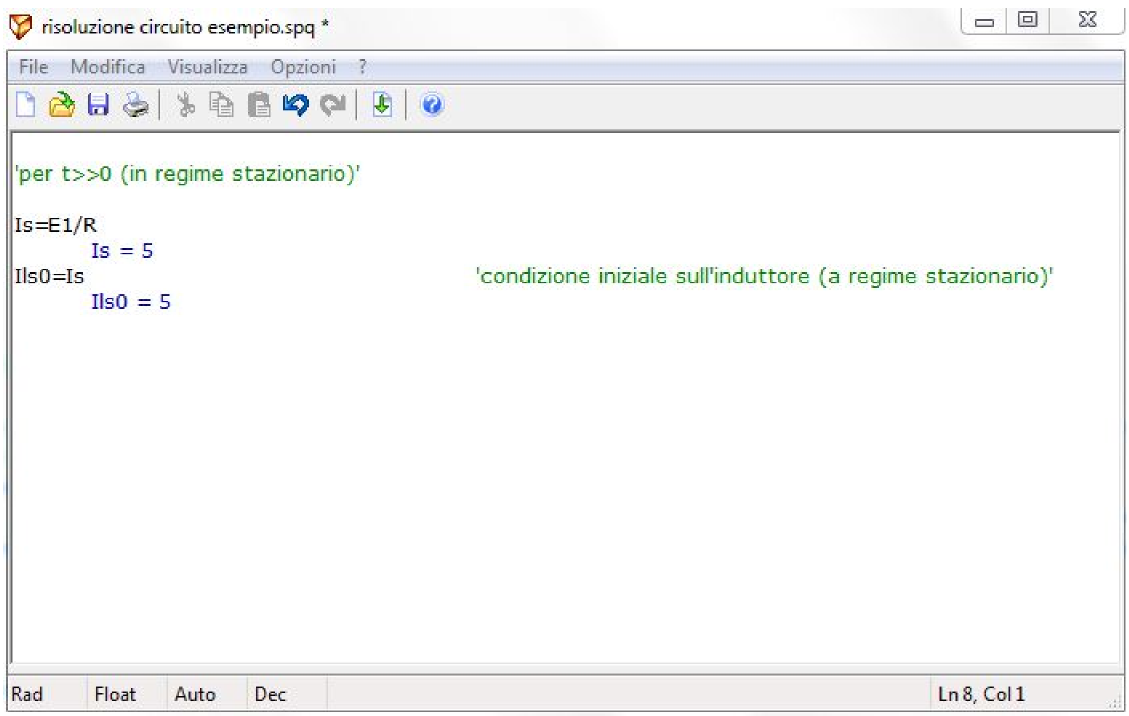
Condizione iniziale prima della commutazione

Adesso rimangono da studiare i due circuiti: quello TRANSITORIO e quello a REGIME:





Procedendo nel calcolo delle condizioni iniziali, studiamo il circuito a regime, quando, dopo la perturbazione, il transitorio si è estinto, ovvero il circuito (anche questo monomaglia) avente come unica sollecitazione il generatore $E1$ (in continua). Di conseguenza l'induttanza si può considerare come un cortocircuito, e si applica la legge di Ohm, trovando la corrente nel ramo R-L, ovvero nell'induttanza. Essendo in regime continuo, la corrente trovata sarà anche la CONDIZIONE INIZIALE A REGIME sull'induttanza.

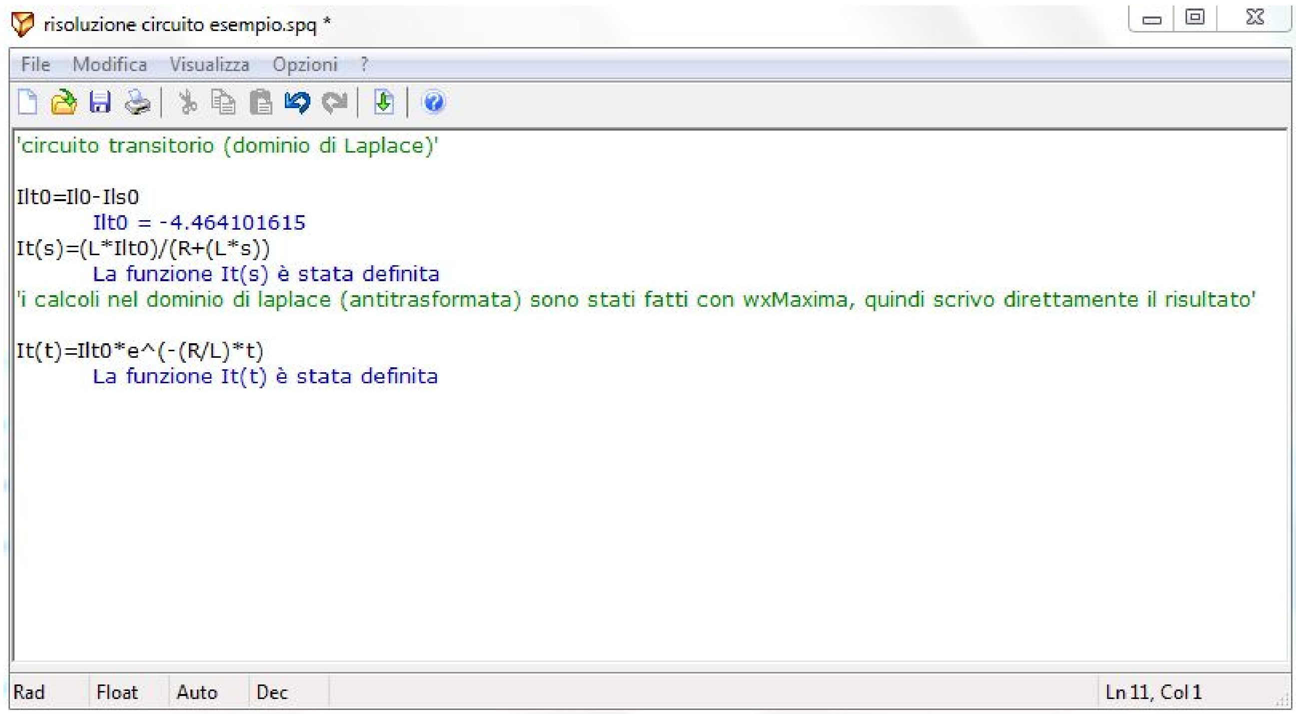


condizione iniziale relativa al regime finale

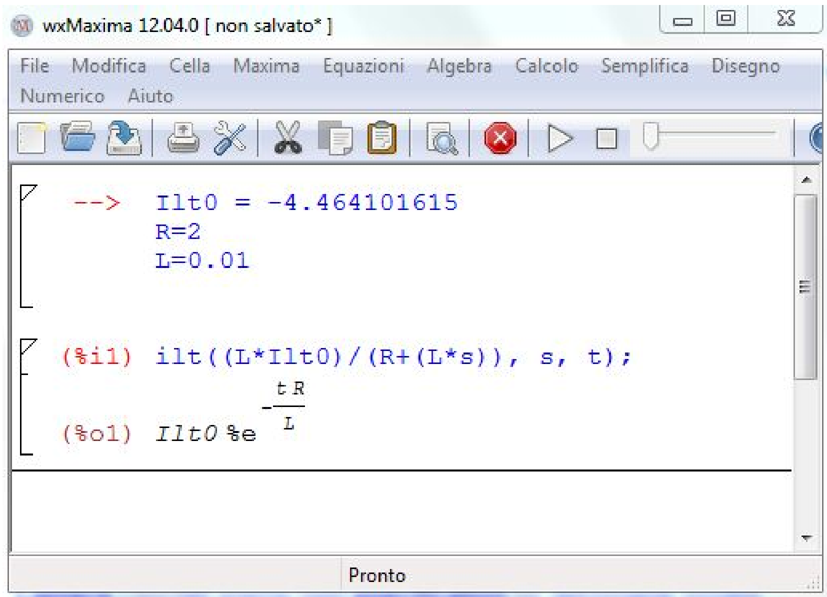
Adesso non ci resta che calcolarci le CONDIZIONI INIZIALI TRANSITORIE ($I_{L-t}(0) = I_L(0) - I_{L-s}(0)$) e studiare il circuito TRANSITORIO (quello che ha come uniche sollecitazioni le condizioni iniziali transitorie) nel dominio di Laplace. Anche per il circuito transitorio, si tratta di una sola maglia, quindi possiamo applicare di nuovo la legge di Ohm:

$$I_t(s) = \frac{Li_{L-t}(0)}{R + Ls} = \frac{i_{L-t}(0)}{s + \frac{R}{L}}$$

dalla quale possiamo ricavare la corrente TRANSITORIA nel dominio del tempo, ANTITRASFORMANDO la corrente nel dominio di Laplace:



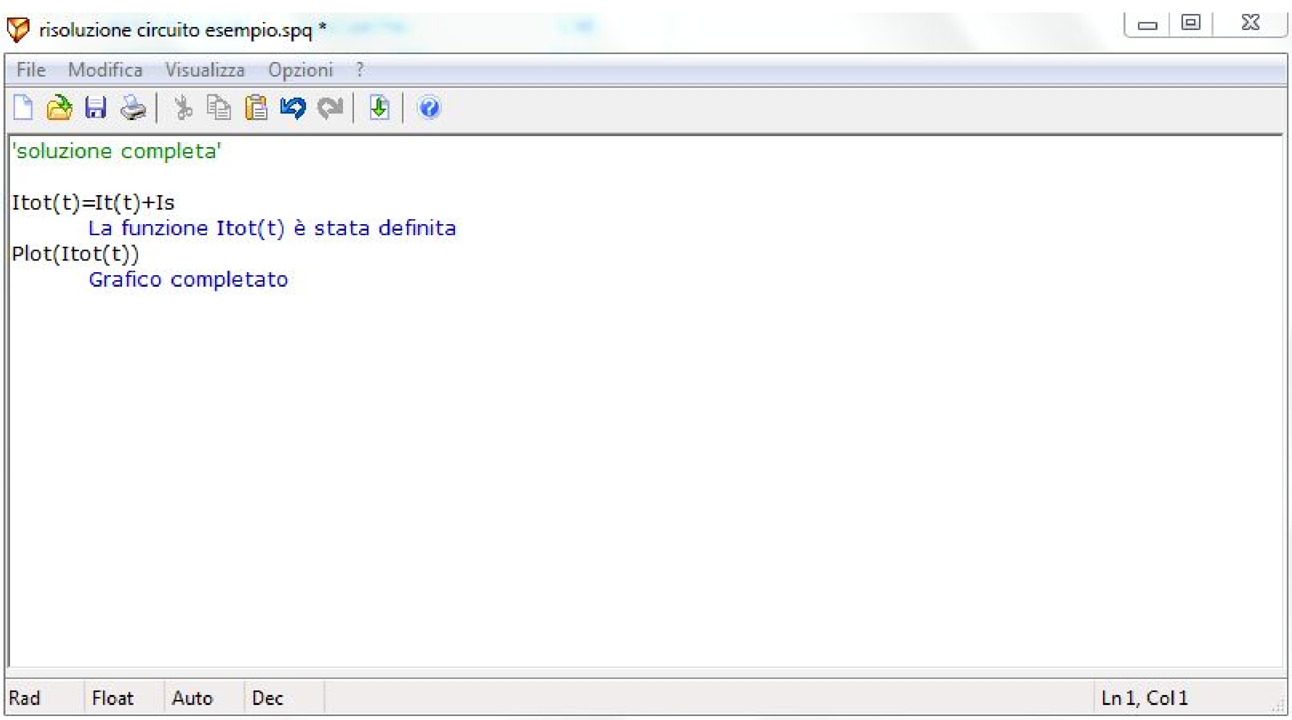
transitorio



antitrasformata

L'ultimo passaggio consiste nel "ricostruire" la soluzione completa, andando a sommare la CORRENTE TRANSITORIA e quella a regime STAZIONARIO ($I(t) = I_t(t) + I_S(t)$):

$$I(t) = I_S(t) + I_t(t) = 5 + [-4{,}46e^{-200t}]u(t)A$$



soluzione completa

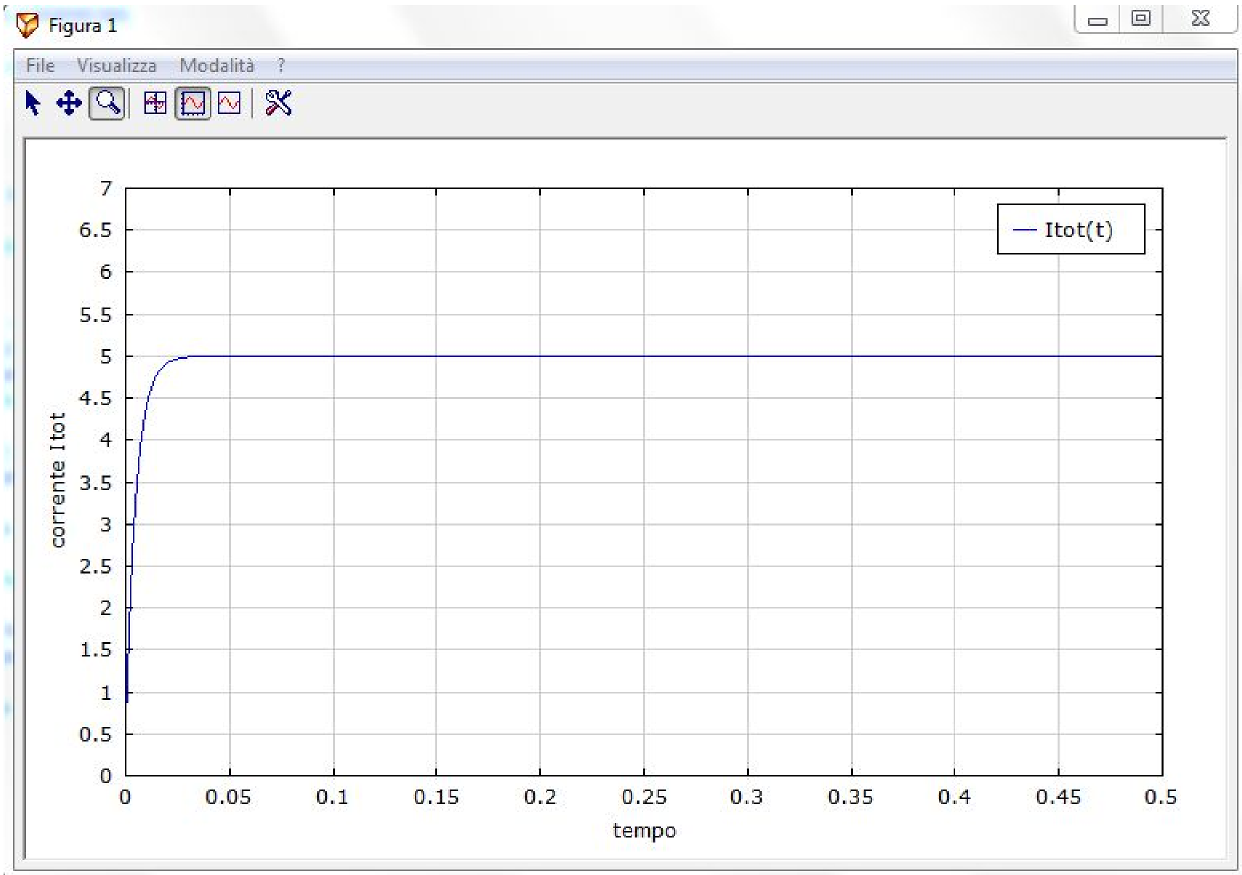


grafico corrente

come possiamo notare, la soluzione ha l'andamento di un esponenziale decrescente (come ci si poteva aspettare) ed è "suddivisibile" in due parti: la prima parte TRANSITORIA è quella caratterizzata dalla risposta esponenziale; la seconda parte, dove la corrente rimane costante, è la risposta permamente del circuito, quella "valida" per sempre!!

N.B. Questo metodo sarebbe stato notevolmente più efficace nel caso che il generatore attivo dopo la perturbazione fosse stato quello SINUSOIDALE, perchè ci avrebbe facilitato i calcoli nel dominio di Laplace, ma come esempio spero sia di aiuto!!

Conclusioni

Questo metodo è una buona alternativa al metodo classico di risoluzione di circuiti dinamici, ma è anche una valida alternativa al metodo "normale" di Laplace (quello per il quale si trasforma direttamente il circuito completo).

Perchè?

la domanda giusta non sarebbe "perchè" ma "quando" questo metodo è vantaggioso... Il procedimento descritto in questo articolo può essere utile nei casi in cui si ha a che fare con sollecitazioni "standard" (sinusoidali o continue) perchè ci permette di studiare i circuiti a regime con metodi più semplici, di conseguenza anche il circuito transitorio (nel dominio di Laplace) diventa più facile da risolvere, perchè si hanno meno generatori di prendere in considerazione (se per esempio disattiviamo un generatore di corrente, è come se si aprisse il ramo nel quale si trova!!!). Inoltre studiando il circuito transitorio con i soli generatori fittizi, evitiamo di portarci dietro funzioni "scomode" come per esempio la trasformata di Laplace di una sinusoide con fase diversa da zero. Naturalmente diventa ancora più utile se la richiesta del problema si concentra esclusivamente sulla risposta transitoria: a quel punto il circuito TRANSITORIO (nel dominio di Laplace) fornisce direttamente la risposta al problema!

Quando invece, non è possibile usare questo metodo?

Questo metodo cade in difetto, nel caso in cui una radice dell'equazione caratteristica (in termini della variabile s) sia uguale ad una presente nel denominatore della L-trasformata della grandezza di sollecitazione. Questo perchè lo sviluppo in frazioni parziali dell'espressione L-trasformata della risposta è particolare per la presenza di una radice multipla nel suo denominatore: in questo caso non sono più distinguibili il contributo del circuito e quello della sollecitazione, di conseguenza le due risposte (TRANSITORIA e STAZIONARIA) risultando indistinguibili.

Bibliografia

-Appunti del corso di ELETTROTECNICA 1 (facoltà di ingegneria di Pisa - laurea triennale in ingegneria elettrica)

-Analisi dei circuiti elettrici lineari - Antonio Longo