



Vicentio Mihalache (Vicentio)

METODI DI INTEGRAZIONE

23 December 2014

In questo articolo descrivo un paio di metodi di integrazione. I metodi base per chi studia Analisi I. "Non vi aspettate a un grande articolo".

Integrazione immediata (integrali elementari)

Il caso più semplice che può capitare è questo dove bisogna conoscere La tavola degli integrali e applicare le formule. Ma soprattutto bisogna sapere che l'integrale è l'inverso della derivata.

$$F'_{(x)} = f_{(x)} \text{ dove } F_{(x)} = \int f_{(x)} \, dx.$$

Tavola degli integrali

$f(x)$	$F(x)$
0	k
k	kx
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$kx^n \ (n \neq -1)$	$\frac{k}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x = \log x $
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$

Tavola degli integrali (formule generalizzate)

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x) $
$[f(x)]^n f'(x)$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	$\arcsin(f(x))$
$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	$\arctan(f(x))$
$e^{f(x)} f'(x)$	$e^{f(x)}$

Integrazione per scomposizione in somme

L'integrazione per scomposizione è possibile grazie alla linearità dell'integrale. È utile per scomporre l'integrale di una funzione in somma di più integrali di funzioni elementari.

$$f(x) = f_{1(x)} + f_{2(x)} + \dots + f_{n(x)}$$

$$\int f(x) \, dx = \int f_{1(x)} \, dx + \int f_{2(x)} \, dx + \dots + \int f_{n(x)} \, dx$$

Esempio

$$\int (3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 4) \, dx = \int 3x^4 \, dx + \int 2x^3 \, dx + \int x^2 \, dx + \int 2x \, dx - \int 4 \, dx = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + C$$

Integrazione per parti

Siano f e g derivabili in $[a, b]$ allora:

$$(fg)' = f'g + fg' \rightarrow -fg' = -(fg)' + f'g \rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

$$\int fg' \, dx = \int (fg)' - f'g \, dx = \int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Per integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

Esempio

$$\int x e^x dx \Rightarrow \begin{cases} x = f(x) \\ e^x = g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

Per parti (ciclici)

Il metodo di integrazione e lo stesso cambia solo il passaggio finale.

Esempio

$$\int \cos^2 x dx \Rightarrow \begin{cases} \cos x = f \\ \cos x = g' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\cos x)' = -\sin x \\ \int \cos x dx = \sin x \end{cases}$$

$$\int \cos(x) \cos(x) dx = \cos(x) \sin(x) - \int (-\sin(x)) \sin(x) = \cos(x) \sin(x) + \int \sin^2 x dx = \cos(x) \sin(x) + \int \cos^2 x dx$$

$$\int \cos^2 x dx = \cos(x) \sin(x) + \int 1 - \cos^2 x dx = \cos(x) \sin(x) + x - \int \cos^2 x dx$$

Fin qui il metodo per parti.

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos(x) \sin(x) + x \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{\cos(x) \sin(x) + x}{2} + C$$

Per sostituzione

L'integrazione per sostituzione è un metodo che ci aiuta a semplificare un integrale che ha una funzione composta in maggior parte dei casi. La formula generale è:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) = a \\ g(\beta) = b \end{cases}$$

Esempio

$$\int \frac{dx}{1 + (3x)^2} \Rightarrow \begin{cases} 3x = t \\ x = \frac{1}{3}t \\ (x)' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{1 + (t)^2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + (t)^2} = \frac{1}{3} \arctan(t) + C = \frac{1}{3} \arctan(3x) + C$$

Integrazione di funzioni razionali

L'integrazione delle funzioni razionali è un metodo molto utile e facile come concetto anche se molto lungo e pieno di calcoli in certi casi. Il metodo consiste in semplificare una certa frazione tra due polinomi in più frazioni. I casi variano. **Casi base** Prima di scomporre la funzione dobbiamo vedere se i due polinomi $A(X)$ e $B(x)$ si possono dividere tra di loro. Dove $\frac{A(x)}{B(x)}$ è la funzione.

I Caso $\text{grado di } A(x) \geq \text{grado di } B(x)$

In questo caso basta dividere i due polinomi.

Esempio

$$\int \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 2x - 1} dx = \int \frac{-\frac{7}{3}x - \frac{7}{3}}{3x^2 + 2x - 1} + \frac{2}{3} dx$$

II Caso $\text{grado di } A(x) < \text{grado di } B(x)$

In questo caso la divisione non serve.

Casi secondari

Considerando un integrale di tipo: $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ Il polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ può avere il delta uguale a zero, maggiore o minore di zero. Da qui tre casi: **I** $\Delta = 0$

Esempio

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx \quad \text{In questo caso possiamo utilizzare la formula del logaritmo:}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \ln |x^2+2x+1| + C$$

Non sempre sono queste situazioni perciò in certi casi dobbiamo semplificare.

Esempio

$$\int \frac{k}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{k}{a(x-x_0)^2} dx = \frac{k}{a} \int (x-x_0)^{-2} dx = \frac{k}{a} \frac{(x-x_0)^{-1}}{-2+1} + C = -\frac{k}{a(x-x_0)} + C$$

O pure:

$$\int \frac{px+k}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{px+k}{a(x-x_0)^2} dx = \int \frac{A}{a(x-x_0)} dx + \int \frac{B}{a(x-x_0)^2} dx = \frac{A}{a} \ln|x-x_0| - \frac{B}{a(x-x_0)}$$

II $\Delta > 0$

$$\int \frac{px+k}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{px+k}{(x-x_1)(x-x_2)} dx = \int \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} dx$$

Esempio

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{x^2-x-6} dx &= \int \frac{4x+1}{(x+2)(x-3)} dx = \int \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)} dx \\ \frac{4x+1}{x^2-x-6} &= \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{x^2-x-6} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{x^2-x-6} \\ \frac{4x+1}{x^2-x-6} &= \frac{Ax-3A+Bx+2B}{x^2-x-6} \end{aligned}$$

$$4x+1 = Ax-3A+Bx+2B$$

$$4x+1 = (A+B)x + (2B-3A)$$

$$4x = (A+B)x ; (2B-3A) = 1$$

$$4 = (A+B) ; (2B-3A) = 1 ; B = 4-A \Rightarrow 1 = 8-2A-3A \Rightarrow 5A = 7 \Rightarrow A = \frac{7}{5} ; B = \frac{13}{5}$$

Ora l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{x^2-x-6} dx &= \int \frac{4x+1}{(x+2)(x-3)} dx = \int \frac{\frac{7}{5}}{(x+2)} + \frac{\frac{13}{5}}{(x-3)} dx = \frac{7}{5} \int \frac{dx}{(x+2)} + \frac{13}{5} \int \frac{dx}{(x-3)} = \\ \frac{7}{5} \int \frac{1}{(x+2)} dx &+ \frac{13}{5} \int \frac{1}{(x-3)} dx = \frac{7}{5} \ln|x+2| + \frac{13}{5} \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

III $\Delta < 0$ In questo caso non ci basta il logaritmo ma dobbiamo utilizzare l'arcotangente.

Esempio

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$$

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx$$

Utilizzando la sostituzione avremo:

$$x + 2 = t$$

$$x = t - 2 \quad x' = 1$$

Ora l'integrale diventa: $\int \frac{dx}{t^2 + 1} = \arctg(t) + C$

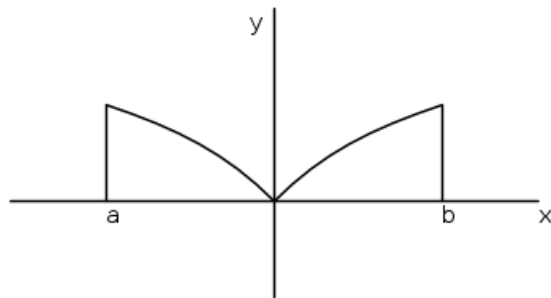
$$\arctan(t) + C = \arctan(x + 2) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x + 2) + C$$

Metodi per integrali definiti

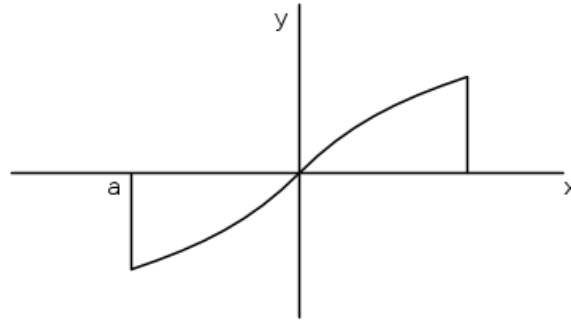
Per le funzioni pari o dispari **Pari** Avendo l'integrale di una funzione pari tra due x uguali ma di segno opposto.

$$\int_{-a}^a \text{funzione pari} dx = 2 \int_0^a \text{funzione pari} dx$$



Dispari Avendo l'integrale di una funzione dispari tra due x uguali ma di segno opposto.

$$\int_{-a}^a \text{funzione dispari} dx = 0$$



Altro metodo

$$\int_0^a f_{[u(x)]} dx = \int_0^a f_{[u(a-x)]} dx$$

Esempio

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^m(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^m(\frac{\pi}{2} - x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\cos^m x + \sin^m x} dx \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\cos^m x + \sin^m x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m x}{\cos^m x + \sin^m x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} + \frac{\cos^m x}{\cos^m x + \sin^m x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Vicentio:metodi-di-integrazione>"