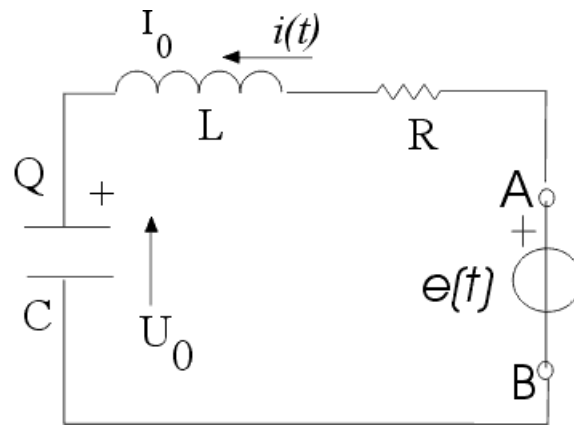


Zeno Martini (admin)

CALCOLO OPERATORIALE

1 January 2004

Sia il circuito elettrico di figura costituito dalla serie di una resistenza R , una induttanza L ed una capacità C , alimentate, a partire dall'istante 0, da un generatore di tensione ideale di forza elettromotrice dipendente dal tempo $e(t)$.



Nell'istante iniziale il condensatore abbia la tensione $U_0 = Q_0/C$ e l'induttore sia attraversato dalla intensità I_0 , con polarità e verso indicati dalle frecce.

L'equazione che ne regola il funzionamento è ricavabile, per $t > 0$, dal secondo principio di Kirchhoff:

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = e(t)$$

con

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Trasformando con Laplace l'equazione differenziale, cioè sostituendo le funzioni $i(t)$ e $q(t)$ (incognite) rispettivamente con $I(s)$ e $Q(s)$ (incognite), $e(t)$ (nota) con $E(s)$ (nota), ed applicando il teorema di derivazione, otteniamo:

$$R \cdot I(s) + \frac{Q(s)}{C} + L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot I_0 = E(s)$$

con

$$I(s) = s \cdot Q(s) - Q_0$$

$$R \cdot I(s) + \frac{\frac{I(s)}{s} + \frac{Q_0}{s}}{C} + L \cdot s \cdot I(s) - L \cdot I_0 = E(s)$$

che può essere scritta nella forma

$$I(s) = \frac{E(s) - \frac{U_0}{s} + L \cdot I_0}{Z(s)}$$

avendo posto

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} + s \cdot L$$

detta *impedenza operatoriale*.

Si ottiene dunque la funzione $I(s)$. Antitrasformandola si ricava $i(t)$. Analogamente, ricavando

$$Q(s) = \frac{I(s) + Q_0}{s}$$

ed antitrasformandola si ottiene $q(t)$.

Calcolo Operatoriale

Quanto appena mostrato sta alla base del calcolo operatoriale.

I bipoli R, L, C nel dominio della variabile s sono schematizzati rispettivamente con R, sL , $1/sC$, e, nei loro raggruppamenti circuitali seguono le note regole della serie e del parallelo.

Si può notare che essi corrispondono alle impedenze pure R, L, C in regime sinusoidale, ponendo $s=j\omega$.

Le condizioni iniziali influiscono come due generatori agenti insieme al generatore applicato $e(t)$: un gradino di tensione di ampiezza pari alla tensione sul condensatore U_0 ed un impulso di tensione di ampiezza LI_0

Le osservazioni precedenti, in particolare la definizione di impedenza operatoriale, consentono di estendere tutti i metodi di risoluzione delle reti in continua, che, come noto, danno luogo a sistemi di equazioni algebriche, alla soluzione delle reti in regime variabile, come si è fatto del resto, per le reti in alternata sinusoidale. Anche in quest'ultimo caso si è trattato, in effetti, di un problema risolto mediante una trasformazione che ha trasferito il problema dal dominio del tempo al dominio della frequenza mediante la corrispondenza biunivoca tra sinusoidi isofrequenziali e numeri complessi.

La soluzione della rete si ha nel dominio della variabile s , è cioè una funzione di s ; con l'antitrasformata o, più spesso con l'utilizzo delle tabelle di conversione e dei teoremi enunciati, si trova la soluzione nel dominio del tempo.

Spesso però si rinuncia anche all'antitrasformazione, deducendo il comportamento nel dominio del tempo da parametri ricavabili nel dominio della variabile s . Cosa che del resto è comune allo studio dei circuiti in c.a. sinusoidale dove moduli e sfasamenti si ricavano direttamente dai numeri complessi o vettori che rappresentano le sinusoidi, senza ricorrere all'espressione della sinusoidi nel dominio del tempo.

Nei nodi vale per le trasformate delle correnti il primo principio di Kirchhoff:

$$\sum I(s) = 0$$

per le maglie il secondo:

$$\sum E(s) - \sum \frac{U_0}{s} + \sum L \cdot I_0 = \sum Z(s) \cdot I(s)$$

nelle quali vengono applicate le solite convenzione sui segni, una volta indicate negli schemi i versi positivi assunti per le correnti nei rami.

Possiamo osservare che

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} - \frac{U_0}{s \cdot Z(s)} + \frac{L \cdot I_0}{Z(s)} = I_p(s) + I_l(s)$$

con

$$I_p(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}$$

trasformata dell'intensità di corrente a regime permanente, dovuta al generatore applicato

ed

$$I_l(s) = -\frac{U_0}{s \cdot Z(s)} + \frac{L \cdot I_0}{Z(s)}$$

trasformata dell'intensità di corrente corrispondente alla evoluzione del sistema sotto la sola azione dell'energia presente all'istante iniziale (intensità di corrente negli induttori e carica nei condensatori): *evoluzione libera*.

Esempio 1

Siano, con riferimento al circuito esaminato, $e(t)=E$, $U_0=0$, $I_0=0$

Si ha immediatamente

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{E}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} =$$

$$\frac{E}{L \cdot \left(\frac{R}{s \cdot L} + s^2 + \frac{1}{L \cdot C} \right)} = \frac{E}{L[(s+a)^2 + b^2]}$$

dove

$$a = \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - a^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Si possono distinguere tre casi, che dipendono dai valori di R, L e C, per ognuno dei quali la $i(t)$ assume le espressioni di seguito indicate.

1: $\omega^2 = 0$

$$\frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-at}$$

2: $\omega^2 > 0$

$$\frac{E}{\omega \cdot L} \cdot t \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega t$$

$$3:\omega^2 < 0$$

$$\frac{E}{\omega' \cdot L} \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sinh \omega' t$$

dove

$$\omega'^2 = -\omega^2$$

Funzione di trasferimento

Se si ricerca il valore di una grandezza in un ramo di una rete, ad esempio la corrente, conseguente all'applicazione di una data sollecitazione in qualche altro punto o ramo della rete, ad esempio un generatore variabile di tensione in un ramo, la trasformata della corrente $I(s)$ è generalmente legata alla trasformata della sollecitazione $G(s)$, da una relazione del tipo:

$$I(s) = F(s) \cdot G(s)$$

$F(s)$, funzione di s dipendente dai parametri della rete, è detta funzione di trasferimento. Se la sollecitazione è un impulso unitario, $G(s)=1$ per cui si può dire che la funzione di trasferimento è la risposta della rete all'impulso unitario.

Il concetto di funzione di trasferimento va oltre la semplice considerazione dei circuiti elettrici. Ogni sistema dinamico di cui si desidera conoscere l'andamento di alcune grandezze, dette *uscite*, conseguente all'azione di altre grandezze, dette *ingressi*, è riconducibile alla conoscenza della funzione di trasferimento. La funzione di trasferimento è generalmente un rapporto di polinomi ed il comportamento dinamico del sistema dipende dalle radici del denominatore, dette *poli* e da quelle del numeratore, dette *zeri*.

E' questo l'inizio di un vastissimo campo d'indagine che porta allo sviluppo della teoria dei controlli automatici.