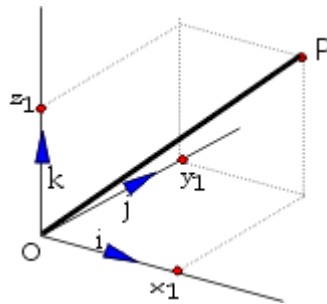


Zeno Martini (admin)

VERSORI, PRODOTTI, NABLA

1 January 2004



Useremo come sistema di riferimento il sistema cartesiano, costituito dagli assi x,y,z ortogonali.

Chiameremo *versore* un vettore di modulo unitario avente direzione e verso specificati.

Indicheremo con ***i, j, k*** i versori degli assi x,y,z rispettivamente.

Allora se x_1, y_1, z_1 sono le coordinate cartesiane del punto P_1 , il vettore **$A = OP_1$** si può scrivere:

$$\vec{A} = \vec{i} \cdot x_1 + \vec{j} \cdot y_1 + \vec{k} \cdot z_1$$

Prodotto scalare: E' uno scalare che si ottiene moltiplicando i moduli dei vettori per il coseno dell'angolo che essi formano. Il prodotto scalare è commutativo.

$$P = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \cos \alpha$$

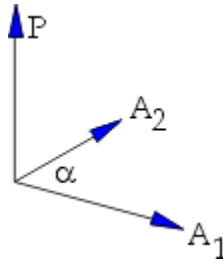
Osservazione

Per i versori ***i, j, k*** si hanno le relazioni

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad ; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Prodotto vettoriale: è un vettore ortogonale al piano individuato dai due vettori, orientato in modo che il suo verso coincide con l'avanzamento di una vite destrorsa

se il primo vettore è fatto ruotare, per sovrapporlo al secondo, attraverso l'angolo più piccolo, e modulo uguale al prodotto dei moduli per il seno dell'angolo.



Dunque, con riferimento alla figura si ha:

$$\vec{P} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = (A_1 \cdot A_2 \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{n}$$

essendo n il versore della normale al piano.

Il prodotto vettoriale non è commutativo: scambiando l'ordine dei fattori, il prodotto ruota di 180° .

Osservazione

Per i versori i, j, k si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} ; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} ; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} ; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} ; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{aligned}$$

Nabla



è un operatore formale, introdotto da Hamilton con un simbolo che ricorda la forma dello strumento musicale a corde di origine ebraica che ha lo stesso nome, definito da

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Si usa come una qualsiasi espressione algebrica stabilendo la seguente uguaglianza formale

$$A \cdot \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial s}$$

E'utile per una compatta scrittura di alcune definizioni e relazioni che saranno successivamente illustrate.

Ad esempio il prodotto scalare di nabla per un vettore è

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

espressione nota come [divergenza](#) di A

mentre il quadrato di nabla corrisponde all'operatore

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

che applicato ad una funzione scalare dello spazio V(x,y,z) dà

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

espressione nota come **laplaciano** di V:

la seguente invece

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

rappresenta il [gradiente](#) di V (un vettore);

Proseguendo (si tengano presenti le [relazioni precedenti](#) per i prodotti tra versori)

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \cdot \vec{k} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \vec{j} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \vec{i} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \cdot \vec{k} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \cdot \vec{j} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \cdot \vec{i}$$

quindi

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}$$

vettore noto come [rotore](#) di A