



Paolo Musolino

NUMERI NATURALI

7 January 2006

"Dio ci ha dato i numeri naturali, il resto è opera dell'uomo."

Leopold Kronecker (Liegnitz, 1823-Berlino, 1891)

Per quanto possa apparire facile e immediata la comprensione di tali enti, del tutto poco *naturale* e semplice è la definizione di questo concetto basilare della matematica.

Fin dalla prima infanzia, o comunque già dai primi anni delle scuole elementari, si è stati abituati a separare la duplice natura del numero naturale, a seconda che esso rappresentasse la risposta ad una domanda di tipo quantitativo o ordinale. In altre parole si è detto che se un determinato numero fornisce la risposta alla domanda *Quanti?*, esso avrà la forma *cardinale*, altrimenti sarà del tipo *ordinale* (risponde, quindi, alla domanda *In che posizione?*).

Proprio l'immediatezza e l'innocuità -almeno apparente- di questo ente portava i matematici dell'antichità a darne svariate definizioni, la maggior parte delle quali, se guardate con gli occhi della Logica moderna, crollava riducendosi ad una semplice tautologia.

Così Euclide ne dà una definizione, abbastanza vacillante, mediante l'introduzione del concetto di unità:

"Unità è tutto ciò per cui una cosa è detta *uno*"

"Numero è una *moltitudine* di unità"

Se durante l'antichità il concetto di numero naturale veniva definito -ma forse farei meglio a dire si *tentava* di definirlo- mediante considerazioni per così dire *empiriche* -con scarso successo-, a partire dal diciannovesimo secolo cominciano ad aversi definizioni più rigorose dal punto di vista logico e che vertono su *relazioni tra insiemi* e sul concetto di *classe*.

Il matematico tedesco Georg Cantor definisce il numero per *astrazione*, formalizzando ciò che significa *aver lo stesso numero* di elementi:

"Si dice che due aggregati hanno lo *stesso numero* quando sono *coordinabili*, ossia quando i loro argomenti si possono porre in corrispondenza biunivoca."

Di estremo interesse è il concetto di *infinità* che deriva da tale definizione: un insieme si dirà *infinito* qualora sia *equipotente* ad un suo *sottoinsieme proprio*.

A differenza di Cantor, il celebre logico e matematico Peano fa dell'idea di *numero uno* dei tre *concetti primitivi*, assieme a *zero* e *successivo*.

Accanto ad essi pone cinque *proposizioni primitive*, su cui fonda -induttivamente-

l'Aritmetica.

Tali postulati (indipendenti) sono:

1. Zero è un numero;
2. Il successivo di un numero è un numero;
3. Se i successivi di due numeri sono uguali, i due numeri sono uguali;
4. Se una classe contiene lo zero e se, contenendo un numero, contiene anche il suo successivo, allora essa contiene tutti i numeri;
5. Il successivo di un numero non è mai zero.

Per quanto potessero essere logicamente solidi i sistemi ideati tanto da Cantor quanto da Peano, essi avevano il difetto di non definire direttamente il numero, non attribuendo alcun significato all'ente in questione.

Il logico e filosofo Bertrand Russell ne dà una definizione *nominale* (diretta), procedendo per passi:

Definisce lo *zero* come la classe delle classi prive di elementi e l'*uno* come la classe delle classi costituite da uno solo. Dice *due* la classe delle classi originate dall'unione disgiunta di due classi *unitarie* (con un solo elemento). Definito *n*, definisce -induttivamente- il *successivo di n*, come la classe delle classi ottenuta unendo ad una classe di numero *n* una *unitaria* non contenuta dalla prima.

Per completare il suo sistema, introduce il *principio dell'infinito*:

Se una classe ha un dato numero di elementi, esiste sempre un oggetto che non appartiene alla classe

Come scrive egli stesso nei *Principles of Mathematics*, si ha, dunque, che *un numero non è nient'altro che una classe di classi equipotenti*.

Paradossi logici quali l'antinomia di Russell (1902) o quella di Burali-Forti (1897), mostrano contro quali ostacoli vada a scontrarsi (e in particolare evidenziano ciò su cui non si può fare affidamento) chiunque sia intenzionato a dare una definizione rigorosa di *numero naturale* (o *numero*, semplicemente).

Il paradosso di Russell, mette in evidenza la debolezza del concetto di *classe* -vale a dire *insieme*- così come è presente nella teoria classica -ingenua- degli insiemi. Descriviamolo brevemente qui di seguito.

Esistono insiemi che sono elementi di se stessi e altri che non lo sono. Si consideri l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi: se appartiene a se stesso, non appartiene a se stesso; se non appartiene, appartiene.

Tanto l'*appartenenza*, quindi, quanto la *non appartenenza* generano una contraddizione e, dal momento che *tertium non datur* (alla domanda *E' elemento di se stesso?* possiamo rispondere o con un sì o con un no), si ha il *paradosso*.

E' chiara, dunque, la *pericolosità* del definire il *numero* mediante il concetto di *insieme* o *classe*. Questo paradosso, come ha notato il matematico Frege, mette in dubbio la possibilità di *passare da un concetto alla sua estensione* e di parlare di *classi*.

Il paradosso di Burali-Forti fa notare che se è vero che dato un ordinale qualsiasi esiste sempre un ordinale maggiore, è anche vero che il numero ordinale massimo determinato dall'insieme di tutti i numeri ordinali è il massimo numero ordinale.

Svariati problemi hanno dovuto fronteggiare i matematici di ogni tempo nel definire enti apparentemente semplici come questi, ma proprio dai paradossi e dalle contraddizioni che si trovarono di fronte seppero trovare nuova vitalità, poichè, come notò Poincarè, *la logistique n'est plus stérile: elle engendre la contradiction!*.