



Zeno Martini (admin)

GRADIENTE E POTENZIALE

1 January 2004

Integrale di linea

Si definisce *integrale di linea* l'integrale, calcolato lungo una linea di estremi A e B, del prodotto scalare tra il vettore in ogni punto P della linea ed il versore della tangente in quel punto.

$$\int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_A^B A \cdot \cos \alpha \cdot ds$$

Osservazioni

- In generale il valore dell'integrale, oltre che dagli estremi della linea A e B, dipende anche dalla linea che li unisce, usata per il calcolo.
- Se A e B coincidono, cioè se la linea è chiusa, l'integrale è chiamato *circuitazione*.
- Quando il valore dell'integrale dipende solo dagli estremi A e B e non dal percorso, la circuitazione (integrale di linea per una linea chiusa) vale zero. Il campo del vettore **A** si dice allora *lamellare* o anche *irrotazionale*.
- In un campo di forze l'integrale di linea corrisponde al lavoro unitario (per unità di massa in meccanica, per unità di carica in campo elettrico) fatto dal vettore del campo durante lo spostamento della massa e/o della carica dal punto A al punto B.

Potenziale

Se esiste una funzione scalare V del punto P per la quale è possibile scrivere

$$V = - \int \vec{A} \cdot d\vec{s} + k$$

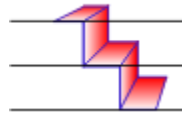
dove k è una costante arbitraria, essa è chiamata *funzione potenziale*.

L'integrale definito tra i punti A e B è detto *differenza di potenziale*.

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Osservazioni

- Il potenziale è una proprietà del campo trasferita al corpo sensibile all'azione di quel campo.
- Nei campi di forze il potenziale corrisponde all'energia unitaria posseduta dalla massa in meccanica o dalla carica, nel caso elettrico, quando esse si trovano in quel punto.
- Le superfici per tutti i punti delle quali V è costante si dicono superfici equipotenziali. Ovviamente, per ogni coppia di punti di una superficie equipotenziale la differenza di potenziale è nulla.



Gradiente

Si definisce gradiente del potenziale un vettore che ha modulo pari alla derivata della funzione potenziale V nella direzione di massima variazione di V nell'intorno del punto considerato (quindi dV/dn), direzione coincidente con quella di massima variazione, verso orientato secondo le V crescenti. Ciò è espresso da

$$\vec{A} = \text{grad} V$$

Le sue componenti cartesiane sono

$$A_x = \frac{\partial V}{\partial x}; A_y = \frac{\partial V}{\partial y}; A_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Osservazioni

- E' la grandezza che indica direzione e verso secondo cui si ha la massima variazione di potenziale oltre che l'entità di questa variazione.
- Se A è un vettore irrotazionale ed ammette V come funzione potenziale si può scrivere $\vec{A} = -\text{grad} V$
- Il vettore $\mathbf{A}$ è ortogonale alle superfici equipotenziali. Quindi linee di forza e superfici equipotenziali si intersecano ortogonalmente.

- Utilizzando l'operatore nabla, moltiplicandolo scalarmene per il gradiente, si ha

$$\vec{\nabla} V = \text{grad} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div} \vec{A} = \text{div}(\text{grad} V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

- **Laplaciano di uno scalare:** la parte finale della precedente espressione definisce il seguente operatore. Laplaciano di uno scalare V è l'espressione

$$\Delta_2 V = \text{div}(\text{grad} V)$$

la sua espressione in coordinate cartesiane è

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$