



Federico Tramarin

SULLE EQUAZIONI DI MAXWELL

20 February 2006

PREMESSA

Questo articolo nasce come commento alla [lezione](#) sulle equazioni di Maxwell , pubblicata nel sito. Fa seguito ad una sua richiesta di approfondimento circa una nota da me spedita a margine di quella lezione.

L'articolo si propone di evidenziare come le Equazioni di Maxwell (d'ora in poi EdM) siano condizioni matematiche sui vettori che descrivono il campo elettromagnetico in un modo del tutto generale. La loro soluzione, quindi la descrizione del campo effettivo oggetto di studio, è fortemente dipendente dal mezzo in cui la soluzione è ricercata. Come si vedrà è indispensabile descrivere chiaramente il mezzo per avere una soluzione univoca. La descrizione si traduce in relazioni matematiche che vengono dette relazioni costitutive.

E' la revisione di un mio precedente articolo che, in base alle osservazioni che mi erano pervenute, aveva suscitato qualche perplessità per la troppa astrazione matematica. Ho cercato di spiegare più in dettaglio l'obiettivo che mi ero proposto di perseguire. Ad ogni modo è ancora richiesta una certa familiarità con l'analisi matematica, in particolare con l'analisi vettoriale. Quindi: integrali semplici, doppi e tripli; circuitazione, rotore, divergenza, gradiente; l'operatore nabla.

Equazioni generali del campo elettromagnetico

Quando si vuole analizzare il problema delle EdM senza porre alcuna ipotesi sul mezzo presente nella regione di interesse, si deve ricorrere alle relazioni più generali delle leggi dell'elettromagnetismo, che sono state enunciate nel suddetto articolo. Si indicano con K il campo elettrico, con H quello magnetico, con B il campo induzione magnetica, con D il vettore spostamento elettrico e con J la densità di corrente.

Per quanto detto quindi la forma della LEGGE DI FARADAY da usare è la seguente:

La circuitazione del campo elettrico è data dall'opposto della variazione di flusso del vettore di induzione magnetica	$\oint_l \vec{K} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS.$
--	---

Mentre per quanto riguarda la legge di LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL si ha:

La circuitazione del campo magnetico è data dal flusso della somma della densità di corrente e della variazione dello spostamento elettrico.	$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dS.$
--	--

Si ha poi il PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA:

Il flusso della densità di corrente, cioè l'intensità della corrente attraverso la superficie, è data dall'opposto della variazione di carica presente all'interno del volume.	$\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dV$
--	--

dove si è indicato con ρ_v la densità di carica per unità di volume, ed è integrata nel volume racchiuso dalla superficie indicata con S .

Da queste equazioni si ricavano, applicando due noti teoremi di analisi, il teorema di Stokes e della divergenza, le medesime relazioni espresse in forma differenziale. Anche queste vengono riportate (sono le cosiddette Equazioni di Maxwell ai rotori):

$$\nabla \times \vec{K} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

e il principio di conservazione della carica si riscrive come:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}.$$

Vorrei porre l'attenzione sul fatto che le equazioni riportate finora sono diverse da quelle presentate nella lezione del prof. Martini. Ciò è dovuto proprio al fatto che, non ponendo ipotesi sulla natura del mezzo in cui stiamo studiando il problema (per inciso, potrebbe essere un ottimo conduttore, un liquido, del vetro...), non possiamo ancora sostituire semplicemente al vettore $\vec{B}$ l'espressione $\mu_0 \vec{H}$ e così via per gli altri campi.

Lo studio delle soluzioni in queste condizioni di assoluta generalità mostra subito che si deve risolvere un sistema di due equazioni vettoriali (e quindi sei scalari) in cinque incognite vettoriali (quindici scalari) dato dalle (1) e (2). Il sistema è incompatibile e le soluzioni possibili sono infinite.

Si devono quindi cercare ulteriori equazioni che permettano di ottenere una soluzione univoca.

Equazioni alle divergenze

Per completezza vorrei richiamare il fatto che dalle EdM espresse in forma differenziale è possibile ricavare le cosiddette Equazioni alle divergenze, che non sono relazioni aggiuntive rispetto alle precedenti, ma rappresentano in qualche modo delle condizioni che una determinata soluzione deve rispettare.

Applicando una nota uguaglianza del calcolo vettoriale:

La divergenza del rotore di un qualsiasi vettore reale è identicamente nulla	$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$
---	---

dalla prima equazione per il campo $\vec{K}$ si può scrivere:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{K}) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

dove si è fatta l'ipotesi di poter scambiare la divergenza con la derivazione, e in più si è fatta la considerazione che, dovendo essere la divergenza stessa una costante allora essa è nulla in quanto, se per un campo nullo ciò è vero, dovendo rimanere costante ciò continua ad essere verificato.

Dalla seconda invece:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D}$$

e ricordando il principio di conservazione della carica, cioè che

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \text{ si ottiene:}$$

$$\left(-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} \right) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v.$$

Le due equazioni ottenute sono quindi:

La divergenza del campo d'induzione magnetica è nulla. E ciò significa che il campo è SOLENOIDALE. Questo fisicamente si traduce nel fatto che le linee di campo sono sempre linee chiuse, che non esistono sorgenti o "pozzi" in cui le linee stesse possono terminare.	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
--	----------------------------

TEOREMA DI GAUSS. La divergenza del vettore spostamento elettrico è pari alla densità di carica libera per unità di volume. Fisicamente significa che, integrando la divergenza di $\vec{D}$ su di un certo volume, si ottiene la quantità di carica presente in quel determinato volume. Ancora, esistono delle sorgenti e dei "pozzi" in cui le linee del campo vengono generate, e questi sono rappresentati dalla carica elettrica.	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
--	---------------------------------

Le lievi differenze tra le equazioni riportate sopra e quelle riportate nell'articolo del prof. Martini evidenziano che, a partire dalle relazioni sopra esposte, si può arrivare alla forma descritta in quell'articolo, solo se si pongono alcune ipotesi sul mezzo (aria, vuoto, vetro ...) in cui si sta ricercando una soluzione. Vorrei peraltro notare che la forma riportata dal professore è quella che poi si usa spesso nella pratica quando si va a cercare di determinare l'andamento esatto del campo.

Riassumendo quindi, siamo giunti ad avere un sistema di due equazioni in cinque incognite vettoriali (cioè sei equazioni scalari in quindici incognite scalari) che non è chiaramente compatibile, a cui si devono aggiungere le due condizioni

vettoriali appena riportate che le eventuali soluzioni devono soddisfare. Si devono trovare quindi altre tre equazioni vettoriali linearmente indipendenti che permettano di "chiudere" il sistema: sono queste le relazioni costitutive.

Relazioni costitutive

Si arriva dunque a porre qualche ipotesi sul mezzo in considerazione. D'altra parte è anche ovvio che se si è interessati a ricavare una soluzione valida ad esempio per il campo prodotto da un'antenna satellitare nello spazio, è assolutamente inutile considerare legami tra i vari campi vettoriali in gioco che sono veri, ad esempio, nel vetro. Inoltre, come viene più volte richiamato anche nell'articolo del prof. Martini, le proprietà del vuoto permettono di semplificare molto la trattazione.

Si può definire una classe abbastanza ampia di mezzi in cui risulta per i quali è interessante studiare le soluzioni delle EdM; in genere poi approssimare un materiale reale alle proprietà che saranno ora definite, per il fatto che la soluzione, soprattutto manuale, delle EdM risulta molto più agevole.

Nel vuoto, dove per definizione, non esistono cariche libere, si può scrivere:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{K} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \vec{J} = 0 \quad (3)$$

dove $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m$ è la costante di permittività dielettrica

assoluta, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ è la costante di permeabilità magnetica assoluta. Vi è dunque un legame di diretta proporzionalità tra i campi in gioco, ed in questo caso le EdM risultano simmetriche:

$$\nabla \times \vec{K} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \quad (5)$$

Esiste inoltre una particolare classe di mezzi in cui le relazioni tra i campi vettoriali si possono scrivere in questo modo:

RELAZIONI COSTITUTIVE	$\vec{D} = \epsilon \vec{K} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \gamma \vec{K}$
----------------------------------	---

dove si considerano $\epsilon, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, e γ è la conducibilità del materiale che si misura in S/m . Questi mezzi devono soddisfare alle proprietà di isotropia, linearità, omogeneità e non dispersività sia nel tempo che nello spazio, di seguito definite. Le relazioni costitutive impongono ancora, quindi, una proporzionalità diretta tra i campi, allo stesso modo del vuoto, ma ora si tiene conto delle proprietà elettriche e magnetiche del materiale. Questo perchè le costanti ϵ, μ sono date dal prodotto tra l'omonima costante assoluta del vuoto e quella relativa del mezzo; per chiarire:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

$$\mu = \mu_r \mu_o$$

mentre la conducibilità compare non appena si voglia tener conto di quanto il mezzo è in grado di condurre corrente, e per questo non compare nelle relazioni riguardanti il vuoto. Il pedice "r" indica che ci si riferisce alla costante relativa del mezzo, che è appunto una misura di quella proprietà relativa al mezzo rispetto al vuoto. Le costanti relative sono adimensionali, indicano solo un fattore di scala: ad esempio il teflon ha costante di permittività dielettrica uguale a 2.1 e ciò significa che per sapere qual è il valore di ϵ da usare nelle relazioni si deve calcolare:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o \Rightarrow \epsilon = 2,1 \cdot \frac{10^{-9} F}{36\pi m}$$

Analizziamo ora cosa significa, per un mezzo, soddisfare alle proprietà richieste per poter scrivere in quel modo le relazioni.

Per non appesantire troppo l'articolo scriverò le relazioni solo per il vettore $\vec{D}, \vec{K}$ essendo quelle per gli altri vettori dello stesso tipo.

Isotropia

E' la proprietà che riguarda il comportamento del mezzo nei riguardi della direzione dei vettori presenti nelle EdM. Ovvero è possibile che un mezzo non si comporti allo stesso modo se, per citarne uno, il vettore $\vec{K}$ incide perpendicolarmente alla sua superficie o se vi incide con un determinato angolo. Ad esempio i cristalli e le ferriti sono mezzi sensibili alla direzione del campo (anisotropi), mentre il vuoto, l'aria ed il vetro sono isotropi.

In tutta generalità potremmo scrivere: $\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{K}$, dove $\bar{\epsilon}$ è una matrice 3×3 del tipo;

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix};$$

così pure per μ, γ . Una scrittura del genere significa che il vettore $\vec{D}$ potrebbe risultare ruotato, traslato, in generale modificato, attraversando il mezzo, rispetto al vettore $\vec{K}$.

Allora si ha isotropia se sono verificate le condizioni:

$$\epsilon_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j \quad (6)$$

$$\epsilon_{ii} = \epsilon, \quad i = 1, 2, 3 \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Si può quindi scrivere:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \vec{e} = \epsilon \vec{e}.$$

Analogo ragionamento per entrambe le altre "costanti", porta quindi al fatto di poter, almeno in prima approssimazione, considerare le costanti ϵ, μ, γ come dei numeri reali.

Linearità

Se, inoltre, si volesse esprimere in modo ancor più generico la relazione $\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{K}$ (quella generale, dando per non verificata l'ipotesi di isotropia) si dovrebbero includere alcuni termini non lineari, ovvero di ordine superiore al primo, divenendo così

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{K} + (\bar{\epsilon}^{(2)} \vec{K}) \vec{K} + [(\bar{\epsilon}^{(3)} \vec{K}) \vec{K}] \vec{K} + \dots$$

Questa scrittura significa che, oltre al fatto che vi possa essere una relazione tra spostamento elettrico e campo elettrico data da una matrice (o una costante reale nel caso di isotropia), vi potrebbero essere dei casi in cui si debba tener conto degli effetti secondari del mezzo.

E' come se si facesse un'approssimazione: il primo termine tiene conto della parte fondamentale del campo dovuta al passaggio all'interno di un determinato mezzo, i termini successivi rendono conto di effetti di approssimazione successiva, che va via via aumentando di precisione quanto più sono i termini considerati.

Per fare un esempio, si consideri il fatto che in una regione sia presente un determinato campo elettrico $\vec{K}_1$, e per qualche

motivo il suo valore in un certo istante venga dimezzato. Allora se il mezzo è lineare il vettore $\vec{D}$ avrà le componenti dimezzate rispetto a prima, al contrario se il mezzo non è lineare ciò non è più vero e il risultato sarà tanto più sbagliato (male approssimato) quanto più forte è la non linearità del mezzo (molti termini di approssimazione successiva).

In genere però, fintantoche l'ampiezza dei campi non è molto grande, i termini di ordine superiore al secondo danno un contributo molto piccolo e per questo possono essere trascurati.

La proprietà di linearità riguarda quindi il fatto di considerare solo i termini del prim'ordine.

Questa importantissima proprietà, che si cerca sempre di avere, si rende indispensabile per poter applicare un noto principio: la SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

Non dispersività nel tempo e nello spazio

Questa proprietà tiene conto, invece, di come risponde il mezzo, visto però come sistema "attivo", alla presenza di un campo. Possiamo infatti immaginare che il mezzo in esame sia un sistema I/O (input/output), con una determinata relazione I/O, con ingresso il campo (che può essere $\vec{K}$ oppure $\vec{H}$) ed in uscita $\vec{D}$, $\vec{B}$ o $\vec{J}$.

Matematicamente la risposta si ottiene, nel dominio del tempo, come convoluzione della risposta impulsiva del sistema (del mezzo) con l'ingresso. In questo caso si sta trattando con ingressi vettoriali, quindi la risposta impulsiva è data in realtà da una matrice di risposte impulsive e la trattazione si complica di molto.

In pratica questa proprietà ci dice che la relazione che c'è tra $\vec{D}$ ed $\vec{K}$ non è un semplice prodotto per una costante (o una matrice), ma si dovrebbe passare per una integrazione nel tempo sul volume che si sta considerando. Come si può capire questo rende molto difficile una valutazione delle EdM fatta "a mano" ed il problema andrebbe invece risolto al calcolatore.

L'effetto generale, comunque, è che il campo nel mezzo dipende, oltre che dall'istante di osservazione, anche dalla "storia" passata; inoltre l'effetto della dispersività è tanto più forte quanto più il mezzo riesce ad "inseguire" le variazioni del campo. Un effetto effettivamente visibile nello studio della propagazione delle onde magnetiche sono i cosiddetti *pacchetti d'onda*, che però esulano dall'argomento del presente, e riguardano invece le soluzioni delle EdM. Basti dire che in questo caso le varie costanti dipendono invece dalla frequenza di osservazione, e questo porta ad una modifica, ad esempio, della velocità con cui si propagano le onde e.m. e la stessa velocità varia con la frequenza.

In realtà tutti i mezzi sono dispersivi, quindi si effettua un'approssimazione e si trascura in prima battuta questo

effetto, salvo riprendere il problema per "aggiustare" le soluzioni trovate. In generale comunque è possibile trascurare questo effetto se il campo varia molto più velocemente della risposta del mezzo.

Omogeneità nel tempo e nello spazio

Quando si scrive che $\vec{D} = \epsilon \vec{K}$ si suppone in realtà che ϵ sia costante in ogni punto. Ancora, quando si è scritto $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ si è supposto che la costante di permeabilità

magnetica fosse costante nei confronti del tempo. Questo non è vero in generale, anzi la permittività, la permeabilità e la conducibilità possono, in certi casi, essere delle funzioni scalari, dipendenti sia dalle coordinate spaziali e dal tempo, ovvero:

$$\epsilon = \epsilon(x_1, x_2, x_3, t) \quad \mu = \mu(x_1, x_2, x_3, t) \quad \gamma = \gamma(x_1, x_2, x_3, t).$$

Allora, con la dicitura omogeneità nel tempo e nello spazio, si intende che queste grandezze sono effettivamente costanti sia rispetto a variazioni di posizione, che nei confronti di variazioni di tempo. Una scrittura matematica possibile per riassumere questo concetto è la seguente:

$$\nabla \epsilon = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0$$

dove si è indicato con ∇ il simbolo di gradiente, che in coordinate cartesiane si esprime come $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Questa proprietà mi permette allora di considerare a tutti gli effetti delle costanti, rispetto a qualsiasi variazione, la permeabilità, la conducibilità e la permittività.

Va detto però che è una approssimazione abbastanza forte, nel senso che durante il suo cammino, un'onda e.m. può incontrare ostacoli di varia natura, con costanti diverse da quelle di partenza. Questo quindi fa cadere il ragionamento che si è

appena esposto. In questo caso quello che si cerca di fare è di studiare le soluzioni nelle varie regioni ci interesse e si cerca a posteriori di unire le soluzioni trovate, in modo che esse rispettino tutte le leggi della fisica.

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Per prima cosa è bene precisare che spesso, nello studio di problemi di elettromagnetismo, è comodo usare le relazioni costitutive, ma esse in realtà rappresentano delle approssimazioni, e come in ogni problema in cui siano presenti approssimazioni, sta a chi sta allo studioso capire l'entità dell'errore che si sta commettendo e se la soluzione trovata può avere un senso.

Volendo riassumere quanto fin qui esposto si può scrivere:

Il vettore spostamento elettrico è dato dal prodotto tra la costante di permittività dielettrica del mezzo, calcolata come prodotto tra quella relativa del mezzo e quella assoluta del vuoto, ed il vettore del campo elettrico. La relazione matematica è quindi:	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
---	------------------------------

Il vettore di induzione magnetica è dato dal prodotto tra la costante di permeabilità magnetica del mezzo, calcolata come prodotto tra quella relativa del mezzo e quella assoluta del vuoto, ed il vettore del campo magnetico. La relazione matematica è quindi:	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
--	-------------------------

La densità di corrente si calcola come prodotto tra la conducibilità del mezzo in esame ed il campo elettrico che lo attraversa. Ciò si traduce in:	$\vec{J} = \gamma \vec{E}$
---	----------------------------

Per concludere voglio quindi riscrivere le EdM inserendo queste relazioni e facendo alcune note.

Innanzitutto, spesso si scompone il termine $\vec{J}$ presente nelle EdM considerandolo come somma di due parti: una dovuta alle correnti impresse dai generatori, o che comunque sono le sorgenti dei campi; una seconda dovuta al fatto che il campo stesso, con la sua presenza, induce delle correnti. Effettivamente le due cose non sono divisibili, nel senso che imprimere delle correnti comporta la generazione di un campo elettromagnetico, ma questo a sua volta induce delle correnti nei mezzi in cui si propaga.

Nonostante ciò si preferisce comunque fare questa distinzione per il fatto che è spesso possibile conoscere con buona approssimazione il valore delle correnti impresse, e allora si scrive che $\vec{J}_t = \vec{J}_i + \vec{J}$ dove per comodità di simboli ho scritto con il pedice "t" il vettore densità di corrente presente nelle EdM originarie.

Una seconda precisazione riguarda le notazioni usate: nella letteratura italiana si usa il simbolo γ per indicare la conducibilità, mentre il simbolo convenzionale a livello internazionale è σ , per cui su alcuni testi è possibile trovare questo secondo simbolo per indicare la conducibilità; ancora, in genere, specie nei libri di campi elettromagnetici, si trova l'uso delle lettere minuscole per indicare i vettori nel dominio del tempo, e si riservano le lettere maiuscole per i vettori nel dominio delle frequenza, di cui non ho parlato, che si introducono per fare studi più approfonditi. Ho preferito usare comunque le lettere maiuscole per uniformità con l'articolo del prof. Martini, così pure per il simbolo del campo elettrico per il quale ho usato $\vec{K}$ mentre in genere è indicato con $\vec{E}$, o meglio $\underline{\vec{e}}$.

Quindi, se un mezzo ha le proprietà elencate al par.3, si possono fare le seguenti considerazioni:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

dove si è usato il fatto che il mezzo è omogeneo nel tempo per non includere nella derivazione le costanti di permeabilità magnetica.

Inoltre si può scrivere:

$$\vec{J}_t + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_i \Rightarrow \gamma \vec{K} + \epsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \vec{J}_i$$

dove si è usata la scomposizione tra correnti impresse e correnti indotte, e ancora si sono usate le proprietà elencate, sotto le cui ipotesi valgono le relazioni costitutive.

E' quindi possibile riscrivere le

Equazioni di Maxwell ai rotori

$$\nabla \times \vec{K} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \gamma \vec{K} + \epsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \vec{J}_i$$

ed il termine $\vec{J}_i$ è appunto relativo alle correnti impresse; si hanno poi le

Equazioni di continuità

$$\nabla \cdot \vec{K} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

e le relazioni che permettono di scrivere tutto questo che sono le **Relazioni costitutive**

Queste equazioni, che sono del resto quelle esposte nell'articolo del prof. Martini, risultano chiaramente più "amichevoli" per una ipotetica soluzione: infatti ora il sistema è ancora formato da due equazioni vettoriali (e quindi sei scalari) ma ora le

incognite sono solamente due campi vettoriali, il campo elettrico e quello magnetico (che quindi costituiscono sei incognite) e la soluzione è ora possibile in modo univoco.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{K}$$

—