Zeno Martini (admin)

EQUAZIONI DI MAXWELL

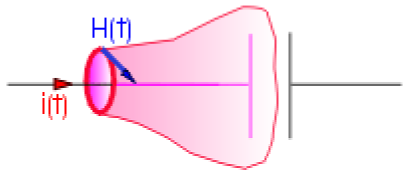
1 January 2004

James Clerk Maxwell (1831-1879), era convinto che la teoria dell'azione a distanza tra corpi, tipica della fisica newtoniana, fosse insufficiente a spiegare completamente i fenomeni elettrici e magnetici, come aveva fatto Weber, con ottimi risultati del resto. Molto più incline, come Faraday, a ritenere che lo spazio di separazione tra i corpi esercitasse una funzione attiva, elaborò, nella seconda metà dell'800, quella che lui stesso, già in una memoria del 1864, chiamò "teoria dinamica del campo elettromagnetico".

Per Maxwell lo spazio era costituito da un mezzo elastico, detto etere, che, perturbato dai fenomeni elettrici e magnetici aventi sede in un corpo, si contraeva ed espandeva originando onde che consentivano all'energia elettromagnetica di diffondersi nello spazio. La velocità di propagazione era uguale a ciò che Weber chiamava rapporto elettromagnetico, e coincideva con la velocità della luce. L'etere era un'ipotesi di lavoro di cui nessuno, in seguito ha potuto dimostrare l'esistenza; anzi, l'esperimento di Michelson-Morley, che è considerato uno dei fondamenti della relatività, *sembrò* negarla. L'etere permise però a Maxwell di elaborare una nuova teoria, sfruttando la potenza dell'analogia che egli poté stabilire tra il comportamento dei mezzi materiali elastici con quello di questo elemento ipotetico, pervasivo di tutto lo spazio, o che, forse, era lo spazio stesso.

Le equazioni note come equazioni di Maxwell sono quattro e possono essere espresse sia in forma integrale che in forma differenziale. Erano già note ai tempi in cui egli le elaborò, ma ad una di esse Maxwell, grazie alla concezione dello spazio vuoto come parte attiva dei fenomeni elettromagnetici, dette un contributo decisivo. Si tratta dell'equazione che elimina un'incompletezza del teorema di circuitazione di Ampere, introducendo il concetto di *corrente di spostamento*, il concetto più direttamente legato alle proprietà elastiche del mezzo.

L'incompletezza del teorema si aveva quando, in presenza di un conduttore percorso da corrente collegato all'armatura di un condensatore, si sceglieva un percorso chiuso che abbracciava il conduttore e che era il contorno di una superficie a forma di sacco che passava tra le armature del condensatore.



Per questa configurazione, mentre il condensatore si carica, quindi mentre l'intensità di corrente varia, la circuitazione del campo magnetico, variabile con la corrente, è diversa da zero, mentre la corrente intersecata dalla superficie a forma di sacco è nulla. Maxwell comprese che ciò era vero se ci si limitava alla sola corrente di conduzione poiché effettivamente le linee di corrente si interrompono sull'armatura del condensatore. Ma se si considera che le cariche positive, accumulandosi sull'armatura, danno origine a sempre nuove linee di campo elettrico che si sviluppano nel dielettrico verso la seconda armatura con carica negativa, si comprende come queste linee di campo elettrico variabile, possano essere considerate una "continuazione" delle linee di corrente. Le linee di questo campo elettrico che sta variando sono, in pratica, la corrente di spostamento che, considerata come continuazione della corrente di conduzione, risolve il problema della circuitazione di Ampere, generalizzando la sua validità ad una qualsiasi configurazione fisica. Quando la *i(t)* si annulla, si annulla anche il campo magnetico, e, contemporaneamente, la sua circuitazione e la corrente di spostamento, mentre il campo elettrico nel condensatore assume un valore costante (determinabile con il teorema di Gauss che costituisce la prima equazione di Maxwell: *K=Q/ (e S)*dove *Q* è la carica sull'armatura, *S* l'area della sua superficie, *e* la costante dielettrica)

EQUAZIONI DI MAXWELL		
n	**Forma integrale**	**Forma differenziale**
1	$\phi_E = \oint \vec{K} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$ Il flusso del vettore campo elettrico (***K***) attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica racchiusa dalla superficie divisa per la costante dielettrica del mezzo. (legge di Gauss)	$div\vec{K} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ La divergenza del vettore campo elettrico in un punto è pari alla densità di carica nel punto diviso la costante dielettrica del mezzo.
2	$\phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$div\vec{B} = 0$

	Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è nullo.	La divergenza del vettore induzione magnetica in un punto è nulla.
3	$E = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$ La circuitazione del vettore campo elettrico (***K***) è uguale alla derivata del flusso, cambiato di segno, del vettore induzione magnetica attraverso la superficie delimitata dal contorno (legge di Faraday-Lenz)	$rot\vec{K} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ Il rotore del vettore campo elettrico (***K***) in un punto è la derivata del vettore induzione magnetica in quel punto.
4	$C_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot (I + \varepsilon \cdot \frac{d\phi_E}{dt})$ $I_s = \varepsilon \cdot \frac{d\phi_E}{dt}$ corrente di spostamento: derivata rispetto al tempo, del flusso del campo elettrico moltiplicata per la costante dielettrica, l'intuizione di Maxwell. La circuitazione del vettore induzione magnetica è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del mezzo per il totale flusso di carica elettrica nell'unità di tempo, che attraversa la superficie delimitata dal contorno. Il totale flusso di carica nell'unità di tempo è la corrente totale, composta della corrente di conduzione I e della corrente di spostamento:$I_{tot}=I+I_s$	$rot\vec{B} = \mu \left(\vec{\delta} + \varepsilon \frac{d\vec{K}}{dt} \right)$ $\vec{\delta}_s = \varepsilon \frac{\partial \vec{K}}{\partial t}$ densità di spostamento: derivata del campo elettrico moltiplicata per la costante dielettrica Il rotore del vettore induzione magnetica è uguale al prodotto della permeabilità magnetica del mezzo per la somma della densità di corrente di conduzione e della densità della corrente di spostamento.
	Ossevazioni	

1. Le equazioni sono scritte per un qualsiasi mezzo materiale. Ma molto importante è il caso particolare del vuoto. In tal caso permeabilità magnetica e costante dielettrica hanno i valori noti, e_0 e m_0. Nelle equazioni n. 4, corrente di conduzione e densità d diventano nulle e le equazioni stesse sono praticamente simmetriche con le n. 3. Indicando con *c* la velocità della luce, l'equazione 4 differenziale diventa

$$rot\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d\vec{K}}{dt}$$

2. Il vettore campo elettrico ***K*** nei corpi materiali rappresenta la forza elettrica totale per unità di carica e può comprendere, oltre alle forze di origine elettromagnetica, anche forze di origine diversa (chimica, termica, meccanica..). In questo caso, indicando con $\boldsymbol{K_i}$ le forze *non* elettromagnetiche, la densità di corrente di spostamento va scritta sostituendo ***K*** con $\boldsymbol{K}$-$\boldsymbol{K}_i$

3. Inoltre, sempre l'eq n. 4, nel caso di corpi in movimento con velocità relativa ***v***, occorre togliere dalla forza elettrica totale anche la forza di Lorentz ***F=vxB.***

4. Invece dell'induzione magnetica nelle equazioni può essere usato il campo magnetico, la grandezza più immediatamente legata alla corrente elettrica, nel senso che il suo valore dipende esclusivamente dalla intensità di corrente e non dal mezzo. Si indica con H ed è legato a B da ***H=B/m.*** Inoltre con una considerazione "simmetrica" si può introdurre il concetto di densità di spostamento *D=Is/S* essendo Is la corrente di spostamento ed S la superficie attraversata dallo spostamento elettrico. D è la grandezza che corrisponde più direttamente a B. Si ha per essa il legame ***D=e K.*** Le equazioni di Maxwell espresse in forma differenziale nel vuoto (o nell'"etere") essendo nulle correnti di conduzione e carica elettrica, raggiungono una perfetta simmetria tra campo magnetico e campo elettrico: entrambi sono costituiti da linee chiuse e la loro dipendenza dal tempo fa sì che le une siano l'origine delle altre in una spirale generatrice infinita in ogni punto e per tutti i punti dello spazio, che sta all'origine delle onde elettromagnetiche.

$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$	
$div\vec{K} = 0$	$div\vec{H} = 0$
$rot\vec{K} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$	$rot\vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt}$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{K}$