



Zeno Martini (admin)

IN PRATICA

1 January 2004

PERCHE' QUESTI NUMERI?

Nello studio dei circuiti elettrici è fondamentale considerare grandezze variabili nel tempo con legge sinusoidale.

L'importanza è dovuta sia al fatto che la distribuzione dell'energia elettrica avviene con tensioni di questo tipo, sia al fatto, teoricamente molto più importante, che ogni grandezza alternata variabile nel tempo può scomporsi, con il *teorema di Fourier*, in una somma infinita di grandezze sinusoidali: *la fondamentale* (che ha la stessa frequenza della grandezza originaria) e *le armoniche* (di frequenza multipla della fondamentale ed ampiezze tendenti a zero al crescere della frequenza).

Ogni grandezza variabile sinusoidalmente nel tempo è caratterizzata da 3 parametri:

1. ***l'ampiezza,***
2. ***la frequenza,***
3. ***la fase.***

Se un circuito con parametri elettrici costanti, (Resistenza $[R]$, Induttanza $[L]$, capacità $[C]$), è alimentato da uno o più generatori di tensioni sinusoidali di identica frequenza, le intensità delle correnti nei rami e le differenze di potenziale tra i punti variano secondo una legge sinusoidale che ha la stessa frequenza e differiscono tra loro solo per ampiezza e fase.

Viene allora spontaneo liberarsi della frequenza ed occuparsi del calcolo degli altri due parametri.

Questo tipo di calcolo si dirà nel dominio della frequenza e permetterà di risalire ai valori nel dominio del tempo quando necessario.

Sarebbe utile disporre di uno strumento in grado di trattare unitariamente i due parametri di ogni senoide.

Se riflettiamo sulle operazioni che comunemente eseguiamo con i numeri reali, ci accorgiamo che esse determinano spostamenti sulla retta che li rappresenta.

Poiché sono due i numeri che definiscono una sinusoidale nel dominio della frequenza e due sono le coordinate dei punti di un piano, possiamo dire che le operazioni sulle sinusoidi determinano spostamenti nel piano.

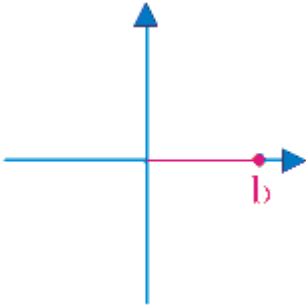
Le operazioni note non ci consentono di uscire con il punto dalla retta. Si rende necessaria una nuova operazione.

Il simbolo che adottiamo per essa è **j**; la definizione è la seguente:

*moltiplicando **j** per **b**, un numero che identifica un punto sull'asse delle ascisse x di un piano cartesiano, otteniamo un punto sull'asse delle ordinate che dista b dall'origine. In pratica il segmento Ob, inizialmente parallelo all'asse delle ascisse, effettua una rotazione di 90° in senso antiorario.*

Questa apparentemente innocua definizione, che non abbiamo ragioni particolari per rifiutare, ha una conseguenza algebrica sorprendente.

Moltiplicando **jb** di nuovo per **j** si ha, conservando le usuali regole dell'algebra, **j²b**. Il punto che gli corrisponde, sta sull'asse delle ascisse x, è alla sinistra dell'origine e dista b. L'algebra ci costringe a scrivere:

$j^2 \cdot b = -b$	
$j^2 = -1$	
$j = \sqrt{-1}$	

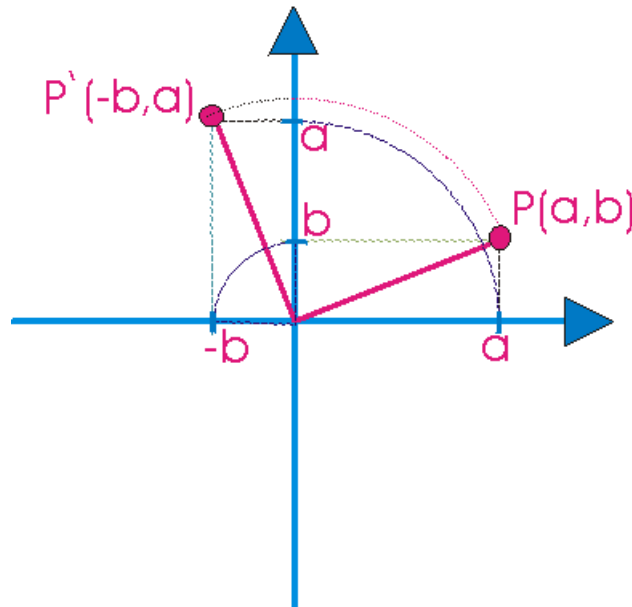
Possiamo intraprendere ogni tipo di considerazione, ma resta il fatto che abbiamo inventato un modo algebrico per uscire dalla retta dei reali e spostarci nel piano.

Con questa operazione è possibile rappresentare ogni punto del piano. Per trovare il punto P di coordinate **(a,b)** basta spostarsi di **a** lungo l'asse x a partire dall'origine, quindi di **b** secondo la direzione dell'asse y. Lo spostamento di una certa distanza lungo un asse corrisponde ad una somma. Con **0+a** arriviamo nel punto sull'asse x che dista **a** dall'origine, quindi ci spostiamo di **b** in senso verticale, operazione che indicheremo con **+jb**.

Il punto **P(a,b)**, che denomineremo numero complesso, può allora essere rappresentato algebricamente da **Z = a + jb**. Osserviamo anche che il segmento OP,

orientato verso P , corrisponde ad un vettore di componenti a e b . Per questo il calcolo con i numeri complessi è anche detto *calcolo vettoriale*.

E' immediato osservare che l'operatore j è esso stesso un numero complesso, per il quale $a=0$ e $b=1$: corrisponde al punto $(0,1)$ sull'asse y delle ordinate. Esso è anche chiamato unità immaginaria poiché, come si è visto, può essere posto uguale alla radice quadrata di -1 . E' anche facile verificare che jZ porta in un punto $P'(-b,a)$ e che il segmento $OP'=OP$, mentre l'angolo tra OP' ed OP è di 90° , come deve essere data la definizione di j .



La notazione $a + jb$ è detta forma cartesiana (o rettangolare) del numero complesso.

Poiché il numero complesso è un punto del piano, si possono usare per individuarlo altri due numeri: le coordinate polari, che rappresentano la prima la distanza del punto dall'origine (modulo), la seconda l'angolo che la semiretta individuata dal punto e dall'origine forma con una retta orientata di riferimento che conviene far coincidere con l'asse x .