



Zeno Martini (admin)

ANALOGIA LINEA ALBERO

12 February 2004

ANALOGIA MECCANICA - ELETTRICA

Spesso arrivano domande tipo: "A cosa serve l'impedenza?". La sensazione, per non dire certezza, è che si tratti di studenti irritati per una fatica inutile per fare "ciò che serve", la mania di un professore obsolecente. La domanda sarebbe migliore se fatta, come dire, a monte: "A cosa serve un circuito elettrico?" La risposta: "A produrre una trasformazione di energia utilizzando la carica elettrica, una proprietà della materia" porterebbe a riflessioni più interessanti. Può essere paragonata al quesito simile: "A che serve un dispositivo meccanico?" cui si risponde "A trasmettere il movimento". In questo secondo caso non si dice trasformare energia, poiché il movimento è immediatamente percepito, mentre l'energia "non si vede", è un concetto astratto, e comunque si tratta sempre di energia meccanica in gioco, cioè associata o all'effettivo movimento di corpi (cinetica) o alla possibilità di trasformarsi in cinetica (potenziale). In entrambi i casi, elettrico e meccanico, si possono usare congiuntamente i verbi trasmettere e trasformare, ed allora è naturale notare la funzione analoga svolta dai due sistemi.

Ogni dispositivo che l'uomo costruisce, cioè una macchina, ha lo scopo di trasformare e trasmettere energia tra un sistema che la mette a disposizione prelevandola da una sorgente e trasformandola con le caratteristiche adatte alla trasmissione, il generatore, ed un sistema che la riceve, l'utilizzatore, che la trasforma conferendole le caratteristiche desiderate. Il trasferimento avviene mediante un organo di trasmissione, un sistema che riceve e consegna energia dello stesso tipo, generalmente dissipandone una parte sotto forma di calore ed instaurando uno scambio per una certa quota di energia che esso, in forza di sue proprietà, è grado di immagazzinare e restituire. L'elettrico è, si può dire, il sistema più abile sia a trasmettere che a trasformare energia.

Ogni sistema è regolato da leggi proprie, ma le tipologie energetiche possono essere correlate tramite leggi matematiche che differiscono per le grandezze coinvolte, ma non per la loro struttura astratta. La matematica del resto, come linguaggio della fisica, non fa altro che ricreare simbolicamente i legami tra le diverse forme di energia, identificandole. Energie che vanno dissipate, trasformate, trasferite, ed energie accumulate internamente al sistema che le trasferisce e/o trasforma.

L'analogia proposta è tra la trasmissione elettrica e quella meccanica. E' definita dalle considerazioni generali seguenti.

- Un sistema generatore immette potenza nel sistema trasmettitore: entrante, **P_e**
- L'utilizzatore ne preleva una parte: potenza utilizzata, **P_u**
- Una parte va dissipata in calore: potenza dissipata, **P_d**
- L'eventuale differenza tra la potenza entrante e la somma della potenza utilizzata e dissipata, coincide con la variazione nell'unità di tempo dell'energia interna immagazzinata negli accumulatori tipici del sistema: potenza accumulata, **P_a** . La variazione può essere sia positiva che negativa, cioè gli accumulatori possono sia incrementare che diminuire l'energia immagazzinata.

Quindi

$$P_e - P_d - P_u = P_a$$

Che altro non è che il principio di conservazione dell'energia.

Le precedenti definizioni si riferiscono ad un sistema indipendentemente dal fatto che sia meccanico od elettrico. La considerazione dell'uno e dell'altro modifica unicamente le espressioni delle potenze, non la relazione tra le stesse.

Consideriamo una **linea elettrica** monofase bifilare lunga l con filo di sezione A , che in bassa o media tensione è schematizzabile con una resistenza, la resistenza di linea **$R=r*2l/A$** in serie ad una reattanza, la di linea: **$X=w*L$** dove $L=l*(0,05+0,46*\log 2D/d)$ è l'induttanza della linea, ed un albero rotante schematizzabile con il coefficiente d'attrito **K_a** , ed il momento di inerzia, **J** .

La **linea elettrica** riceve potenza **elettrica** in ingresso trasferendola all'uscita.

La potenza viene immessa in ingresso da un generatore che fornisce la **tensione $u_0(t)$** mentre in uscita l'utilizzatore sviluppa la **forza controelettromotrice $e(t)$** .

Si stabilisce nella **linea l'intensità di corrente $i(t)$** che dissipa una parte della potenza per la **resistenza ohmica** della **linea** mentre una parte è immagazzinata nell'**induttanza** della **linea** e scambiata con il generatore.

L' **albero rotante** riceve potenza **meccanica** in ingresso trasferendola all'uscita.

La potenza viene immessa in ingresso da un generatore che fornisce la **coppia motrice $c_m(t)$** mentre in uscita l'utilizzatore sviluppa la **coppia resistente $c_r(t)$** .

Si stabilisce nell' **albero** la **velocità** $w(t)$ che dissipa una parte della potenza per l' **attrito** dell' **albero** mentre una parte è immagazzinata nel **momento d'inerzia** dell' **albero** e scambiata con il generatore.

Linea

- $P_d(t) = R \cdot i^2(t)$: potenza dissipata;
- $E_m(t) = 0,5 \cdot L \cdot i^2(t)$; energia **magnetica** accumulata nell' **induttanza**,
- $P_u(t) = e(t) \cdot i(t)$ potenza istantanea trasferita;
- $P_e(t) = u_0(t) \cdot i(t)$ potenza fornita al **circuito elettrico** dal generatore.

La variazione di energia accumulata nell'induttanza , cioè la derivata rispetto al tempo, è la potenza l' accumulatore.

$$P_a(t) = P_m(t) = dE_m/dt = i(t) \cdot L \cdot di/dt;$$

per il principio di conservazione dell'energia si ha

$$P_e(t) - P_u(t) - P_d(t) = P_a(t)$$

Solo $P_d(t)$ è sempre positiva poiché dipende dal quadrato della corrente; gli altri termini possono essere in ogni istante sia positivi che negativi. Ciò significa che esistono intervalli di tempo in cui i componenti immettono energia nel sistema, altri in cui la prelevano.

Se consideriamo un intervallo di tempo pari al periodo delle grandezze in gioco, si può dimostrare che l'induttanza in media assorbe un'energia nulla, mentre il generatore immetterà una certa energia, parte della quale è assorbita dalla resistenza e la rimanente dall'utilizzatore. Matematicamente, sostituendo alle potenze della relazione le loro espressioni:

$$i(t) \cdot (u_0(t) - e(t) - R \cdot i(t)) = (L \cdot di/dt) \cdot i(t)$$

cioè

$$u_0(t) - e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot di/dt$$

L' ultima espressione è il secondo principio di Kirchhoff relativo al circuito costituito dalla serie del generatore e dell'utilizzatore con il bipolo RL.

Se indichiamo con E , U_0 , I , le trasformate di $e(t)$ e di $u_0(t)$, $i(t)$, ricordando il metodo [dell'impedenza operatoriale](#) scriveremo

$$U = U_0 - E = I \cdot (R + sL)$$

Cioè

$$U = U_0 - E = U_R + U_L$$

Con

- $U_R = R \cdot I$: tensione resistiva; R impedenza resistiva
- $U_L = sL \cdot I$: tensione induttiva; sL impedenza induttiva

Albero rotante

- $P_d(t) = K_a \cdot w^2(t)$: potenza dissipata per attrito;
- $E_J(t) = 0,5 \cdot J \cdot w^2(t)$: energia **cinetica** nella **massa** rotante con **momento di inerzia J**;
- $P_u(t) = c_R(t) \cdot w(t)$: potenza istantanea trasferita dall'albero motore;
- $P_e(t) = c_m(t) \cdot w(t)$: potenza fornita all'albero dal motore.

Le variazioni di energia accumulata nella massa rotante e nella deformazione torsionale dell'albero, cioè la loro derivata rispetto al tempo, sono la potenza scambiata con gli accumulatori. Valgono rispettivamente:

$$P_a(t) = P_j(t) = dE_J/dt = w(t) \cdot J \cdot dw/dt;$$

Il principio di conservazione dell'energia ci porta dunque a scrivere

$$P_e(t) - P_u(t) - P_d(t) = P_j(t)$$

Solo $P_d(t)$ è sicuramente sempre positiva poiché dipende dal quadrato della velocità; tutti gli altri termini possono essere in ogni istante sia positivi che negativi. Ciò significa che esistono intervalli di tempo in cui i componenti immettono energia nel sistema, altri in cui la prelevano. Se consideriamo un intervallo di tempo pari al periodo delle grandezze in gioco, si può dimostrare che la massa in media assorbe un'energia nulla. Matematicamente, sostituendo alle potenze della relazione le loro espressioni:

$$w(t) \cdot (C_m(t) - C_R(t) - K_a \cdot w(t)) = (J \cdot dw/dt) \cdot w(t)$$

cioè

$$C_m(t) - C_R(t) = K_a \cdot w(t) + J \cdot dw/dt$$

L'ultima espressione altro non sono che il secondo principio della dinamica relativo all'albero in rotazione.

Se indichiamo con **C_R** , **C_m** , **W** , le trasformate di $C_R(t)$ e di $C_m(t)$, $w(t)$, potremo definire

- **$C_R = K_a \cdot W$** : coppia d'attrito; **K_a** impedenza d'attrito
- **$C_J = sJ \cdot W$** : coppia d'inerzia; **sJ** impedenza inerziale

$$C = C_m - C_R = W \cdot (K_a + sJ)$$

Cioè

$$C = C_m - C_R = C_R + C_J$$

L'esempio mostra come sia possibile parlare in astratto di un sistema che trasferisce energia definendo un certo insieme di forme energetiche ed un'unica modalità di trasformazioni ad esse relative.

E' questo fondamentalmente il nucleo concettuale alla base della teoria dei sistemi di controllo. I due esempi esaminati illustrano sistemi del primo ordine nei quali la situazione di regime viene raggiunta con una legge esponenziale caratterizzata da una costante di tempo che dipende dal rapporto tra l'energia immagazzinata e la potenza dissipata, quindi $t_e = L/R$ nella linea, $t_m = J/K_a$ per l'albero rotante. L'applicazione di una tensione U_0 costante (un gradino di tensione) se il carico sviluppa una E costante, porta dopo $5t_e$ all'instaurazione della corrente $I = (U_0 - E)/R$; l'albero rotante, se la coppia resistente è costante con l'applicazione di una coppia motrice costante dopo un tempo $5t_m$ si porta alla velocità $w = (C_m - C_R)/K_a$. La massima corrente che si può avere è la corrente di cortocircuito U_0/R che si ha se $E=0$. La massima velocità è la velocità a vuoto ($C_r=0$) e vale $w_0 = C_m/K_a$.

La figura e la tabella illustrano l'analogia descritta

Grandezze elettriche			Grandezze meccaniche		
Nome	Simbolo	U.mis	Nome	Simbolo	U.mis
Tensione	U	V	Coppia	C	J
corrente	I	A	Velocità angolare	W	rad/s
Resistenza	R	W	Coefficiente d'attrito	K _a	J*s
Induttanza	L	W*s	Momento di inerzia	J	Kg*m ²

Costante di tempo	t	s	Costante di tempo	t	s
Corrente di cortocircuito	I _{cc}	A	Velocità a vuoto	w ₀	rad/s