



Zeno Martini (admin)

SPECULAZIONI

1 January 2004

I numeri complessi dal punto di vista matematico

I numeri sono definiti dalle operazioni che su di essi si fanno.

I primi numeri che incontriamo sono gli interi naturali. Che cosa sono?

Tutto parte dall'idea di unità: essa corrisponde ad un qualsiasi elemento definito, visto come entità autonoma. La rappresentiamo con il simbolo **1** e diciamo che 1 è un numero.

Raggruppando una unità dopo l'altra otteniamo nuovi insiemi che identificheremo con simboli e che chiameremo numeri naturali interi. l'aggiunta di una unità per passare da un numero al successivo definisce l'operazione di somma che a sua volta definisce il nuovo numero. $2=1+1$; $3=1+1+1=2+1$ ecc. Il numero di simboli effettivamente diversi che adopereremo è la base del sistema numerico. Il simbolo di un particolare insieme-numero è una lista di simboli di base costruita secondo regole precise che attribuiscono al simbolo un significato diverso a seconda della posizione occupata: il simbolo più a destra indica gli elementi singoli (le unità), quello che lo segue a sinistra il numero di insiemi che contengono ciascuno tanti elementi quanti sono quelli che costituiscono la base, quello ancora a sinistra il numero di insiemi che contengono tanti insiemi, ciascuno con un numero di elementi pari alla base, quanti sono gli elementi della base.. ecc.. Per indicare un numero qualsiasi scriveremo n o una qualsiasi altra lettera dell'alfabeto, per indicare il successivo $n+1$.

Ogni intero rappresenta un qualsiasi insieme con la stessa quantità di elementi. La somma di due interi corrisponde sempre ad un insieme esistente. La somma sugli interi si può sempre fare, non produce mai qualcosa che non sia un intero. D'altra parte la somma stessa definisce gli interi e sarebbe strano che producesse qualcosa di diverso. La moltiplicazione è una somma ripetuta più volte, quindi non necessità di particolari considerazioni sui suoi risultati.

Se decidiamo di togliere degli elementi da un insieme inventiamo la sottrazione, operazione che costruisce un nuovo insieme, costituito dagli elementi che rimangono dell'insieme originario.

Per poter ottenere come risultato della sottrazione un insieme esistente, dobbiamo togliere dall'insieme di partenza meno elementi di quanti ce ne sono. Già se ci

spingiamo a toglierli tutti la sottrazione produce un risultato che non c'è negli insiemi che abbiamo identificato come interi: non resta nulla ma facendo uno sforzo creativo daremo a questo nulla il nome di insieme vuoto, inventando lo zero. >

Se all'operazione di sottrazione attribuiamo un significato più ampio di quello originario, possiamo inventare nuovi numeri. Per esempio, partendo da due insiemi A e B, immaginiamo un'operazione che annulla tutte le coppie formate da un elemento di A ed un elemento di B. Alla fine del processo resterà un insieme costituito di uno dei due insiemi. Se vogliamo indicare quale dei due insiemi ha dato origine al nuovo insieme prodotto si può adottare un simbolo specifico. Se 2 sono gli elementi di A, 3 quelli di B, l'operazione produce un insieme con 1 elemento. Lo stesso succede se A possiede 3 elementi e B 2, ma, nel primo caso, il risultante contiene 1 elemento di B, nel secondo un elemento di A. Per riconoscere questo fatto, anteporremo al numero 1 un segno convenzionale: - nel primo caso + nel secondo. I numeri con il segno meno sono gli interi negativi, quelli con il segno + i vecchi naturali: insieme costituiscono gli interi relativi.

La divisione è l'altra operazione che ci pone di fronte alla necessità di inventare nuovi numeri. Se un numero m non è multiplo di un numero n , non esiste, per definizione, un intero che possa rappresentare m/n . Rifiutiamo allora l'operazione m/n ? Se c'è un obbligo assoluto affinché l'operazione produca un insieme corrispondente and un intero relativo, risponderemo sì.

Si può però pensare che m/n corrisponda ad un'operazione che produce, a partire da un insieme di m elementi (il dividendo), n (il divisore) insiemi di q (il quoziente) elementi ed un insieme di r (il resto) elementi con r minore di q , cioè

$$m = q \cdot n + r$$

L'operazione m/n definisce un gruppo di insiemi, che nulla vieta di chiamare numero, il quale non è un intero ma un rapporto (*ratio*) di interi. Ciò porta ad estendere il campo numerico introducendo il concetto di numeri razionali.

Osserviamo che ogni estensione comprende la precedente come sottoinsieme:

gli interi naturali sono un sottoinsieme degli interi relativi;

gli interi relativi sono un sottoinsieme dei razionali (2 ad esempio è un razionale in cui $m = 2n$ con n ed m qualsiasi.

Le estensioni non finiscono qui.

Le operazioni fanno aumentare i numeri, forse però solo in apparenza perché infine ci si riconduce sempre agli interi naturali.

Di fronte ad un quadrato di lato 1, volendo calcolare la lunghezza della diagonale siamo costretti a riconoscere che i razionali non bastano.

Non esiste alcun modo di scrivere la lunghezza della diagonale come rapporto di interi.

Infatti supponiamo che questo sia possibile, per cui la lunghezza della diagonale si possa scrivere come m/n con m ed n interi e primi tra loro. Per il teorema di Pitagora si avrà:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad \text{cioè } m^2 = 2 \cdot n^2$$

per cui m^2 è pari (multiplo di 2). Anche m è allora pari, cioè divisibile per 2. Anche n^2 è pari, quindi anche n : ciò contraddice l'ipotesi che m ed n siano primi.

L'unica cosa che possiamo fare è costruire due insiemi di razionali che approssimano con precisione qualsiasi, l'uno per difetto e l'altro per eccesso, la lunghezza della diagonale. Essa appare come qualcosa di infinitamente avvicinabile, ma irraggiungibile. Questo numero così particolare e sfuggente che possiamo solo immaginare in fondo ad un abisso infinito, non esprimibile con un razionale, ma reale in quanto è l'unico in grado di esprimere "esattamente" la lunghezza della diagonale, lo chiameremo un numero irrazionale e/o reale.

I reali comprendono i razionali come sottoinsieme: un qualsiasi razionale può essere infatti immaginato come separazione di due classi di razionali che si avvicinano sempre più senza diventare uguali al razionale considerato pur rimanendo separate. Es: $1/3$ può essere immaginato come l'elemento di separazione di due insiemi del tipo:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} \right)$$

con n intero positivo qualsiasi >1 , sempre minore di $1/3$;

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

con n intero positivo qualsiasi >1 , sempre maggiore di $1/3$.

A questo numero che esiste ma che non possiamo scrivere come rapporto di interi attribuiremo un simbolo nel caso specifico della misura della diagonale del quadrato di lato 1 $\sqrt{2}$.

Di questi numeri ce ne sono infiniti. Sono addirittura di più dei razionali. Sono, ad esempio tutte le radici quadrate dei numeri che non sono quadrati perfetti, tutte le radici cubiche dei numeri che non sono cubi perfetti ecc.

Alcuni sono molto famosi, non sono soluzione di alcuna equazione algebrica, e vengono chiamati trascendenti, come ad esempio p (rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il diametro), ed e (il numero di Nepero, base dei logaritmi naturali che è definito dal seguente limite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Per non perderci nell'abisso che li definisce, li rappresentiamo graficamente. Un qualsiasi numero reale può essere messo in corrispondenza con un punto di una retta orientata su cui è stato fissato un punto particolare detto origine ed un segmento di lunghezza arbitraria assunto come unità di misura. La distanza dei punti dall'origine misurata con l'unità di misura prescelta, corrisponde ad un numero reale. Convenzionalmente si considereranno positivi i numeri corrispondenti a punti che stanno alla destra dell'origine, negativi quelli corrispondenti a punti che stanno a sinistra.

Ci si può accontentare?

Purtroppo no!

Nel risolvere equazioni algebriche di grado n ci si trova spesso a dover effettuare un calcolo che come risultato non ha un numero che gli corrisponda sulla retta dei reali, come ad esempio trovare la radice quadrata di numeri negativi. Eppure si è arrivati a dimostrare che una equazione algebrica di grado n ha n radici. Allora o la dimostrazione è sbagliata o ci sono dei numeri diversi dai reali, che non stanno cioè sulla retta dei reali. La via da seguire è quest'ultima. Inizialmente anche i più coraggiosi hanno deciso di chiamare questi numeri al di fuori della retta dei reali, immaginari, dimenticando che si era fatto uno sforzo anche per immaginare i reali. Bastava, ma è facile con il senno di poi, dire che si trattava di numeri che corrispondevano ad una distanza dall'origine secondo una qualsiasi delle direzioni possibili in un piano prefissato così come i numeri reali erano distanze da un'origine su una retta prefissata secondo una delle due direzioni possibili, destra e sinistra.

Si è trovato che questi nuovi numeri altro non sono che coppie ordinate di numeri reali: d'altra pare uscendo dalla retta ci si muove sui punti di un piano ed ogni punto di un piano è individuato da due coordinate. I numeri complessi si rivelano allora adatti ad affrontare problemi geometrici nel piano, si possono cioè eseguire calcoli algebrici come con i numeri reali e trovare soluzioni a problemi geometrici. Ad esempio la loro somma corrisponde ad una somma geometrica e così via. Alcune operazioni appaiono sorprendenti ed affascinanti come la seguente:

$$e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$$

che ha in sé quella che è stata non a torto definita la più bella formula della matematica:

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

che comprende :

- **1** : l'unità, l'entità di partenza, l'esistente, l'essere.
- **0** : l'elemento neutro dell'addizione, il numero che non è un numero ma che tanto ha fatto per i numeri.
- **p** : quel numero che serviva per la quadratura del cerchio, rapporto tra circonferenza e diametro
- **j** : la radice quadrata dell'unità negativa.
- **e** : il numero di Nepero, base dei logaritmi naturali.
- **+** : l'operazione che dà origine ad ogni altro numero