



Marco Martini

LE FORME DEI NUMERI COMPLESSI

12 March 2006

Definizione

Si definisce **numero complesso** la coppia ordinata (a,b) , dove a e b sono numeri reali. L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbf{C}$; per la definizione precedente esso si identifica con il *prodotto cartesiano* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ cioè con l'insieme di tutte le coppie possibili che si possono formare con l'insieme dei reali, $\mathbf{R}$.

Rappresentazioni ed operazioni

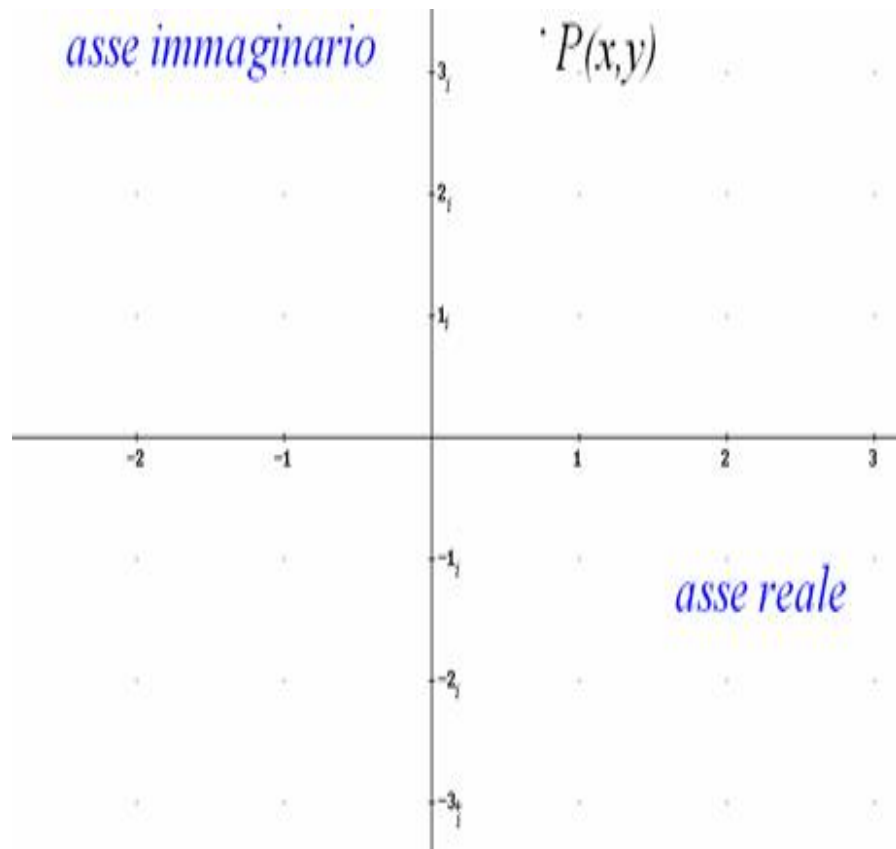
- [*Rappresentazione cartesiana*](#)
- [*Forma algebrica*](#)
- [*Rappresentazione trigonometrica*](#)

Rappresentazione Cartesiana

Com'è noto l'insieme dei numeri reali è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta; per questo motivo la rappresentazione di $\mathbf{R}$ è ottimamente realizzata da una retta, detta *retta reale*. L'insieme dei numeri complessi però non può essere rappresentato in tale modo: per rappresentare un numero complesso quindi si considera un sistema di assi cartesiani monometrico xOy , chiamato **piano complesso** (o piano di Argand-Gauss).

L'asse x viene chiamato **asse reale**, l'asse y **asse immaginario**. Ogni numero complesso $z = (x,y)$ è identificato da una coppia ordinata di numeri reali (x,y) , ossia da un punto $\mathbf{P}$ nel piano cartesiano. L'ascissa di $\mathbf{P}$ viene detta **parte reale** di z e l'ordinata di $\mathbf{P}$ **parte immaginaria**.

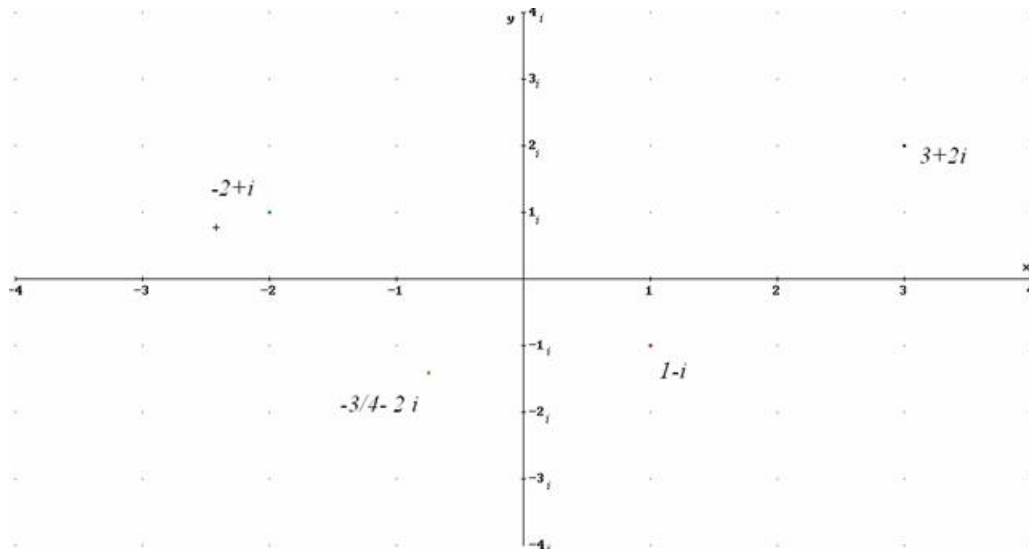
Quindi a z viene associato un punto $\mathbf{P}$ che ha per ascissa la parte reale di z e per ordinata la parte immaginaria di z . Pertanto $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano.

**Esempio:**

Nota: nel paragrafo successivo sarà data la definizione del simbolo **i** e la giustificazione algebrica della scrittura dei numeri complessi proposti nell'esempio. Per ora ci basta considerare il coefficiente di **i** come ordinata sull'asse immaginario, l'altro numero come ascissa sull'asse reale.

Rappresentare sul piano i numeri complessi.

$$3+2i, 1-i, -2+i, -\frac{3}{4}-\sqrt{2}i.$$



Definizione I numeri $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ si dicono **complessi coniugati**. E' immediato riconoscere che se z è un numero reale esso coincide con il suo complesso coniugato in quanto la parte immaginaria è nulla. Cioè:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

I due punti sul piano che rappresentano i due numeri sono simmetrici rispetto all'asse reale.

Osservazione

Un'equazione di secondo grado a coefficienti reali ha sempre due soluzioni che sono

- reali distinte se il discriminante è positivo;
- reali, coincidenti, se il discriminante è nullo;
- complesse coniugate se il discriminante è negativo.

Operazioni con i numeri complessi

Sono le leggi di composizione che vengono definite per le coppie di reali.

Addizione

L'addizione di numeri complessi è una legge di composizione interna a $\mathbb{C}$, introdotta dalla seguente definizione:

Definizione: si dice **addizione** in $\mathbb{C}$ la legge di composizione:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

che ad ogni coppia di numeri complessi (a,b) , (c,d) assegnati fa corrispondere il numero complesso $(a+b, c+d)$, detto **somma** dei numeri complessi assegnati. Ovvero:

$$(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)$$

Esempi:

$$(1,3) + (-2,-2) = (-1,1)$$

$$(0,2) + (1,-4) = (1,-2)$$

Proprietà dell'addizione in $\mathbf{C}$

- è *associativa*: per ogni terna di numeri complessi (a,b) , (c,d) , (e,f) , si ha:

$$((a,b) + (c,d)) + (e,f) = (a,b) + ((c,d) + (e,f))$$

- è *commutativa*: per ogni coppia di numeri complessi (a,b) , (c,d) si ha:

$$(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$$

- ammette in $\mathbf{C}$ l'elemento neutro, $(0,0)$, denominato *numero complesso zero*: per ogni (a,b) appartenente a $\mathbf{C}$ si ha:

$$(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)$$

- ogni (a,b) appartenente a $\mathbf{C}$ ammette, in $\mathbf{C}$, l'inverso additivo, $(-a,-b)$, detto *opposto* di (a,b) :

$$(a,b) + (-a,-b) = (-a,-b) + (a,b) = (0,0)$$

- Inoltre l'opposto di un numero complesso è unico.

Queste proprietà si possono facilmente dedurre dalle medesime proprietà dell'addizione in $\mathbf{R}$

Sottrazione

La sottrazione tra numeri complessi è introdotta grazie alla presenza degli opposti dei numeri complessi. Dati due numeri complessi (a,b) e (c,d) , si definisce:

$$(a,b) - (c,d) = (a,b) + (-c,-d)$$

Dalla definizione di addizione e dalle sue proprietà, l'insieme $\mathbf{C}$ rispetto all'addizione risulta un *gruppo abeliano* (o commutativo)

Moltiplicazione

La moltiplicazione di numeri complessi è una legge di composizione interna a $\mathbf{C}$, introdotta dalla seguente definizione:

Def. Si dice **moltiplicazione** in $\mathbf{C}$ la legge di composizione interna:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

che ad ogni coppia di numeri complessi (a,b) , (c, d) assegnati fa corrispondere il numero complesso $(ac-bd, ad+bc)$, detto **prodotto** dei numeri complessi assegnati. Ovvero:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Esempi

$$(2,1) \cdot (3,5) = (1,13)$$

$$(-4,3) \cdot (1,0) = (-4,3)$$

$$(6,-2) \cdot (0,0) = (0,0)$$

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$$

Proprietà

La moltiplicazione in $\mathbf{C}$ gode delle seguenti proprietà:

- è **associativa**
- è **commutativa**
- è **distributiva rispetto all'addizione**
- ammette in $\mathbf{C}$ l'elemento neutro moltiplicativo, $(1,0)$ denominato *numero complesso uno*
- ogni $(a,b) \in \mathbf{C}$, con $(a,b) \neq (0,0)$, ammette, in $\mathbf{C}$, l'elemento inverso

moltiplicativo, $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$, detto *reciproco* di (a,b) :

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \cdot (a,b) = (a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = (1,0)$$

Inoltre il reciproco di un numero complesso è unico

Dimostriamo l'ultima proprietà. Il reciproco di (a,b) , se esiste, è un numero (x,y) tale che:

$$(a,b) (x,y) = (1,0)$$

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, ciò implica che deve essere anche:

$$(x,y) (a,b) = (1,0)$$

Da queste due uguaglianze e dalla definizione di moltiplicazione tra numeri complessi segue che (x,y) deve essere la soluzione del seguente sistema di primo grado:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Tale soluzione esiste ed è unica. Infatti il determinante del sistema risulta diverso da 0, poichè $(a,b) \neq (0,0)$

Risolvendolo si trova

$$(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

Il reciproco di un numero complesso (a,b) viene talvolta indicato anche con $\frac{1}{(a,b)}$

Esempio

Il reciproco del numero complesso $(0,1)$ è $(0,-1)$ è, ossia coincide con il suo opposto. Infatti, dalla definizione di moltiplicazione tra numeri complessi, risulta

$$(0,-1) \cdot (0,1) = (0,-1) \cdot (0,1) = (1,0)$$

Divisione

Dati due numeri complessi (a,b) e (c,d) , con $(c,d) \neq (0,0)$, si definisce **quoziente** di

(a,b) e (c,d) , e si indica con $\frac{(a,b)}{(c,d)}$, il prodotto di (a,b) per il reciproco di (c,d) .

Osservazione

Dalla definizione e dalle proprietà riportate in precedenza, **C**, dotato delle due operazioni addizione e moltiplicazione è un campo, come lo è **R**. Viene quindi naturale chiedersi se **C** si possa vedere come una particolare estensione di **R**, non solo insiemisticamente, nel senso di un insieme "più ampio", ma anche strutturalmente cioè che conserva le relazioni tra gli elementi che lo costituiscono mantenendo su di essi le operazioni.

A questo proposito accenniamo, se pur brevemente, alla forma matriciale dei numeri complessi, ricavabile immediatamente dalla rappresentazione cartesiana:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, b)$$

Matrici di questo tipo costituiscono una algebra isomorfa a quella delle coppie ordinate, sono un corpo isomorfo al corpo dei numeri complessi. Ricordando che la somma di due matrici è una matrice i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici si ha:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

Il prodotto di matrici è definito come righe per colonne. Quindi si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c - b \cdot d & a \cdot d + b \cdot c \\ -(a \cdot d + b \cdot c) & a \cdot c - b \cdot d \end{pmatrix}$$

Forma algebrica dei numeri complessi. L'unità immaginaria

Si può definire una corrispondenza biunivoca tra **R** ed il prodotto cartesiano , che associa ad ogni numero reale **a** il numero complesso (**a**,0). Si può inoltre verificare che questa applicazione è un isomorfismo di campi. In altre parole questo significa che tale applicazione non dà luogo semplicemente ad un nuovo insieme ma che l'insieme generato mantiene la struttura di quello di partenza. Si può infatti verificare che le operazioni precedentemente definite per i complessi applicate ad generano sempre numeri complessi all'interno di quell'insieme ed il valore del primo elemento della coppia corrisponde al risultato ottenuto con le stesse operazioni sui numeri reali.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
 - se $b=0, d=0$ si ha $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \rightarrow a + c$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

- se $b=0, d=0$ si ha $(a,0)*b(,0)=(a*b,0) \rightarrow a*b$
- $(a,b)^2 = (a,b) \cdot (a,b) = (a^2 - b^2, 2ab)$
- se $b=0$ si ha $(a,0)*a(,0)=(a^2,0) \rightarrow a^2$

Si fa corrispondere in maniera biunivoca ogni numero complesso del tipo **$(a,0)$** con il numero reale **a** (primo elemento della coppia).

Chiameremo il numero complesso **$(0,1)$** è **l'unità immaginaria**) e tutti i numeri complessi del tipo **$(0,b)$** numeri immaginari. Applicando la regola della moltiplicazione troviamo che **$(0,1)*(0,1)=(-1,0)$** che corrisponde al numero reale **-1** . All'unità immaginaria si attribuisce il simbolo **i** per cui dal punto di vista algebrico si ha

$$i^2 = -1 \quad (\sqrt{-1} = i).$$

L'insieme dei numeri complessi può essere considerato come un'estensione di **$\mathbf{R}$** . Ogni complesso **(a,b)** può essere scritto in maniera univoca come somma dei numeri complessi **$(a,0)$** e **$(0,b)$** Ogni complesso si può vedere come somma di un numero reale e di un numero immaginario.

Un generico numero complesso si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) \\ (a,b) &= a + bi\end{aligned}$$

N.B. **i** non è una variabile o un'incognita, è solo un simbolo definito da un punto di vista strettamente algebrico. Come mostrato in una diversa lezione presente nel sito è anche molto utile vederlo come un operatore che applicato ad un numero reale puro lo trasforma in un immaginario puro, facendo compiere, nel piano di Gauss al segmento che congiunge l'origine al punto una rotazione di 90 gradi in senso antiorario.

Def. Si definisce **numero complesso** ogni espressione della forma **$x + iy$** dove **x** e **y** sono numeri reali e **i** è l'unità immaginaria. Il termine **x** si dice **parte reale** mentre il termine **iy** è detto **parte immaginaria**.

Def. Due **numeri complessi** sono **uguali** $\Leftrightarrow$ sia la parte reale sia quella immaginaria sono uguali.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

sono uguali se

$$x_1 = x_2.$$

$$y_1 = y_2$$

- Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ si definisce loro **somma** il numero complesso $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- Dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ si definisce loro **differenza** il numero complesso $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Osservazione:

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy.$$

- Dati due numeri complessi
 - $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$
 si definisce loro **prodotto** il numero complesso

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Osservazione: non è necessario memorizzare queste regole perché esse seguono quelle dell'algebra dei numeri reali sostituendo i^2 con **-1**)

Osservazione:

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

è un numero reale detto **norma** del numero $z = x + iy$.

Si chiama **modulo** di un numero complesso il numero reale $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

- Dati due numeri complessi

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

si definisce loro **quoziente** il numero complesso

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Per eseguire la divisione *si moltiplica numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore*

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Potenza ad esponente intero positivo

$$z^0 = (x + iy)^0 = 1 \quad \text{per definizione.}$$

$$z^1 = (x + iy)^1 = x + iy = z$$

$$z^n = (x + iy)^n = \underbrace{(x + iy) \cdot \dots \cdot (x + iy)}_{n \text{ fattori}}$$

Esercizio:

Determinare le potenze ad esponente intero di ***i*** e rappresentarle sul piano complesso

$$i^2 = -1$$

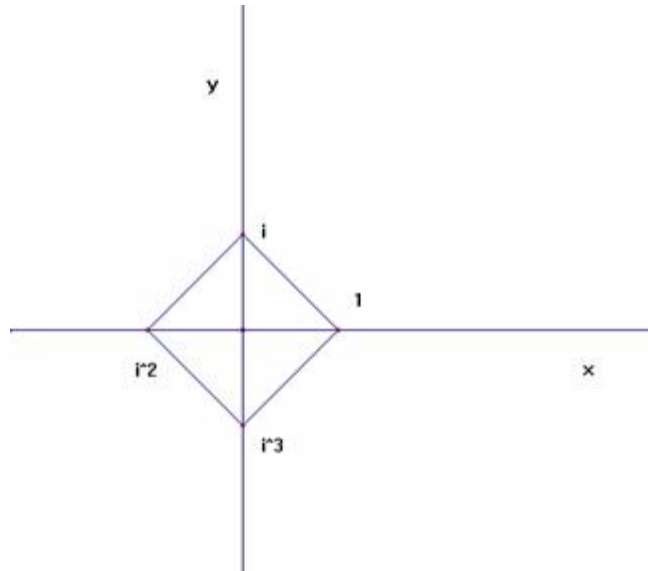
$$i^3 = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

Le potenze assumono ciclicamente i valori 1, *i*, -1, -*i*.

Esse si dispongono sui quattro vertici di un quadrato:



Osservazione: il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei due numeri.

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
 |z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2} = \\
 &= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2|
 \end{aligned}$$

Osservazione:

Il prodotto di due numeri complessi i cui vettori formano con l'asse reale angoli di ampiezza α_1 e α_2 , è rappresentato da un vettore che forma con l'asse reale l'angolo di ampiezza $\alpha_1 + \alpha_2$ e modulo uguale al prodotto dei moduli.

Quanto detto è ampiamente sfruttato nei calcoli quando i numeri complessi sono rappresentati nella forma polare (Modulo ed angolo) strettamente legata alla forma trigonometrica definita nel successivo paragrafo. Come si vedrà anche si ha che il rapporto di due complessi ha come modulo il rapporto dei moduli e come angolo la differenza degli angoli.

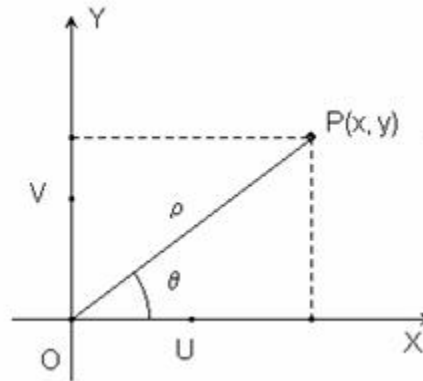
Rappresentazione trigonometrica

Sia $z = x + iy$ un numero complesso e $P(x, y)$ il punto corrispondente nel piano cartesiano. La posizione di P può essere individuata anche mediante le coordinate polari (ρ, θ) riferite al polo O e all'asse polare X dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se $P \neq O$, l'anomalia ϑ , definita a meno di multipli di 2π , è data da

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Il numero $\rho \geq 0$, uguale alla distanza $\overline{OP}$, è il modulo di z , mentre l'anomalia ϑ prende il nome di **argomento** di z .



Poiché $x = \rho \cos \vartheta$ $y = \rho \sin \vartheta$, z può essere scritto nella forma

$$z = x + iy = \rho \cos \vartheta + \rho \sin \vartheta = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

detta **rappresentazione trigonometrica**.

Due numeri complessi $z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$ sono uguali se

$$\rho_1 = \rho_2 \text{ e } \vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$$

cioè se hanno stesso modulo e se le anomalie differiscono per multipli di 2π .

- Prodotto

$$z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + i \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$$

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

- Quoziente

$$z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) \quad z_2 \neq 0 \quad \leftarrow N.B.$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)}{\rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)} = \\ &= \frac{\rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2)}{\rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)(\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2)} = \dots \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)] \end{aligned}$$

Il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha come modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.

- Formula di De Moivre (potenza a coefficiente intero positivo)

Sia $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ un numero complesso. La sua potenza ennesima è data da

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

detta **formula di De Moivre** (si dimostra per induzione).

Esempio:

Calcolare $(1 - i\sqrt{3})^3$.

$$x = 1 \quad y = -\sqrt{3}$$

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2 \quad \cos \vartheta = \frac{1}{2} \quad \sin \vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

posto $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$ si ha

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = 2^3 \left\{ \cos \left[3 \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] + i \sin \left[3 \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \right\} = 8 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)] = -8$$

Esponenziale complesso: particolarità

Sia $e=2.71828...$ la costante di Nepero; si definisce per ogni numero complesso $z = x + iy$ l'**esponenziale complesso** e^{x+iy} come il numero complesso

$$w = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Se $y=0$, cioè se z è reale, si ottiene

$$e^{x+i0} = e^x \cos 0 + ie^x \sin 0 = e^x.$$

Il modulo di $w = e^{x+iy}$ è dato da

$$|w|^2 = (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \Rightarrow |w| = e^x.$$

NB:

Per chiarimenti, spiegazioni, esercizi scrivere un-email all'autore [Marco Martini](#)