



Giovanni Schgör (g.schgor)

Soluzioni non-lineari con Mathcad

26 January 2007

Il problema

Ho lavorato per molti anni in una azienda elettromeccanica e ricordo che fra i test proposti ai candidati all'assunzione ve n'era uno particolarmente insidioso che, in apparenza semplice, veniva regolarmente sbagliato dalla grande maggioranza dei candidati.

Il problema proposto era questo:

un trasformatore monofase da 200W con primario a 220V, alimentato a vuoto (cioè con secondario aperto) assorbe una corrente di 300 mA. Poiché a carico il primario può assorbire una corrente 3 volte superiore, è corretto dire che, sempre a vuoto, il primario potrebbe essere alimentato senza danni fino ad una tensione di 660V?

Un minimo di conoscenza delle basi dell'elettromagnetismo, dovrebbe far riflettere sul fatto che se il trasformatore è progettato per 220V, la sua corrente a vuoto è già tale da portare il flusso magnetico al limite della saturazione del nucleo su cui sono avvolti primario e secondario, quindi non è possibile aumentare la tensione al primario perché ciò comporterebbe un funzionamento con nucleo saturato, quindi con un aumento vertiginoso della corrente assorbita.

Scopo di questo articolo è di entrare più nel dettaglio di questo fenomeno simulandone il comportamento mediante un calcolatore, con l'utilizzo del programma Mathcad. Si ritiene infatti significativo mostrare una procedura di calcolo in presenza di non-linearità che permetta di valutare gli andamenti "istantanei" (cioè istante per istante) delle singole grandezze in gioco.

La soluzione

Per questa procedura dobbiamo infatti abbandonare il comodo impiego delle grandezze vettoriali (rappresentative degli andamenti sinusoidali) e risalire ai principi fisici del funzionamento del

trasformatore. Essenzialmente applicando una tensione al primario di un trasformatore, si crea nel nucleo di questo un flusso magnetico F (in Weber, Wb), la cui variazione si contrappone alla tensione stessa:

$$v = - N_{sp} \cdot dF/dt$$

Per comodità, anziché il flusso è opportuno usare una grandezza specifica, cioè B (induzione magnetica, in Wb/m^2), dividendo cioè il flusso per l'area del nucleo. In definitiva, possiamo scrivere che $v = k_1 \cdot dB/dt$, dove k_1 tiene conto delle caratteristiche dimensionali e costruttive del trasformatore (numero spire, N_{sp} , e sezione nucleo). La creazione del flusso magnetico è ottenuta dalla corrente circolante nel primario, secondo la relazione $F = L \cdot M$ cioè dipende dalla "forza magnetomotrice" M (in As, amperspire) e dalla "permeanza" L del circuito magnetico.

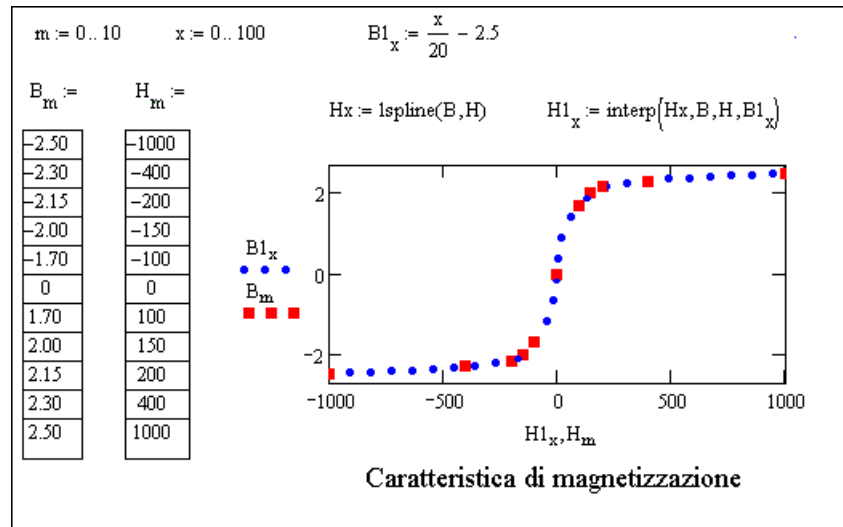
Se quest'ultimo parametro fosse costante, si potrebbe pervenire ad una relazione lineare fra tensione applicata e corrente circolante (impedenza dell'avvolgimento primario) ma, nel caso di variabilità (cioè di dipendenza di L da M), occorre procedere ad una simulazione che tenga conto del suo effettivo andamento.

Mathcad, con la possibilità di elaborazione di dati forniti anche in forma tabellare, può risolvere brillantemente il problema, permettendo di ricavare la corrente che, istante per istante, crea il flusso che si oppone alla tensione applicata.

Cominciamo quindi col costruire la tabella dell'andamento di F in funzione di M . In realtà abbiamo detto di utilizzare grandezze specifiche, quindi B al posto di F ed H (As/cm) al posto di M . Questo ci permette di ricavare i dati dai manuali che riportano l'andamento di B in funzione di H , a secondo del tipo di materiale utilizzato per il nucleo.

Mathcad ci permette poi di ricavare da questi dati (ad es. una decina di punti) una funzione interpolante, **lspline()**. (vedi per riferimento articolo [Interpolazioni](#) in questo stesso nello spazio che Electroportal riserva alle applicazioni con Mathcad)

Ecco l'implementazione di questa procedura in Mathcad:



Come si può vedere, la tabella serve a creare una funzione di spline lineare fra i punti dati (quadrati rossi), funzione che può essere poi utilizzata per ricavare punti intermedi e disegnare ad es. una curva continua (tratto blu)

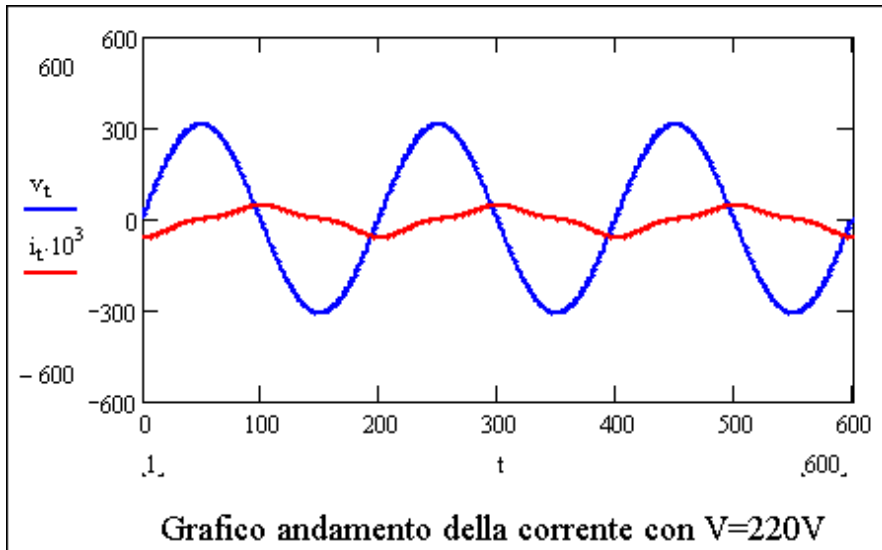
In altre parole, conoscendo B1 si può ricavare H1, e questo ci permette di ricavare la corrente necessaria a mantenere il flusso magnetico che si oppone alla tensione primaria. Non resta quindi che tradurre in Mathcad tale procedura, ricordando che quando si devono calcolare variabili indicizzate interdipendenti, deve essere utilizzata una forma matriciale. Nel nostro caso le variabili sono i valori istantanei della tensione primaria (v), dell' induzione magnetica (Bx) e della corrente primaria (i)

$$\begin{array}{lll}
 t := 1..600 & \Delta t := 0.1 & \omega := 2 \cdot \pi \cdot 50 \\
 k1 := 0.4 \cdot 10^{-3} & k2 := 10^{-3} \cdot 1.22 & Bx_0 := -1.3
 \end{array}$$

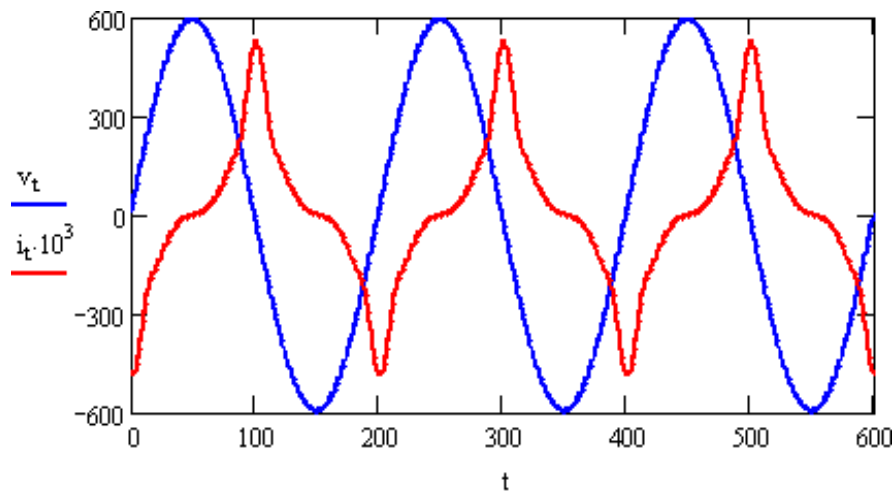
$$\begin{pmatrix} v_t \\ Bx_t \\ i_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{10000} \cdot t\right) \\ Bx_{t-1} + k2 \cdot v_{t-1} \cdot \Delta t \\ k2 \cdot \text{interp}\{H_x, B, H, Bx_{t-1}\} \end{pmatrix}$$

Va precisato che non avendo dati reali sul dimensionamento del trasformatore, i valori di k1 e k2 sono solo ipotetici, poiché qui interessa mettere in rilievo la procedura e i risultati qualitativi più che una simulazione su un caso concreto.

Il tempo di simulazione (t , in decimi di ms) copre 3 periodi a 50Hz, con una scansione Dt di 0.1 ms. L'induzione è ricavata con derivazione discreta, mentre i è ottenuta dal valore di H , interpolato dalla curva sperimentale. (il valore di corrente deve essere amplificato per essere visibile nel grafico). Il risultato, per una tensione primaria efficace di 220V, è:



Con lo stesso programma, cambiando solo la tensione primaria da 220V a 420V, si ottiene il seguente andamento, che mostra gli effetti della saturazione del nucleo magnetico sulla corrente primaria:



Si ribadisce il carattere dimostrativo di questa procedura, ripetendo che più che una simulazione, si è voluto mostrare la semplicità formale di calcolo in presenza di un comportamento non-lineare. Per

una simulazione più "realistica" occorrerebbe tener conto della resistenza dell'avvolgimento primario ed esprimere il valore dell'induttanza (L) di questo, naturalmente variabile in funzione della corrente primaria. L'equazione generale che lega poi i valori istantanei in questo caso è $\mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{di/dt}$, risolta ovviamente con le differenze finite.

[G. Schgör](#)