



Volfango Furgani

INSIEMI

29 September 2002

Domanda:

Desidererei sapere cosa sono gli insiemi e a che cosa servono, chiarirmi un pò le idee, se possibile.

Risponde Volfango Furgani

Per i reni non garantisco. In matematica molti parlano molto di **insiemi**. Giustamente. Anche se nessuno sa dire cosa sono. Lo dice Russel: non sappiamo di cosa stiamo parlando. Insieme è quindi una nozione primitiva nota anche ad Hulk. E, a ben pensare, così come sono, mucchi di oggetti ammassati alla rinfusa, gli insiemi non servono gran che. I matematici non si fermano per così poco. Hanno pensato: complichiamo un po' le cose e mettiamo tutto a posto. Vediamo di collegare fra loro alcuni degli oggetti di un insieme. Nel mondo capita sempre così. Abbiamo gli studenti di una scuola e li mettiamo in relazione fra loro organizzandoli in classi e una classe ha i propri iscritti in ordine alfabetico. Quand'andavo a scuola io, in palestra, ci ordinavano per altezza. Non ho mai capito se per far sentire il più basso ancora più piccolo o per dargli importanza come primo della fila. La **relazione** che intercorre fra gli elementi di un insieme è importante (assai, assai). Per questa via stiamo dando una **struttura** all'insieme invertebrato. Ragioniamoci sopra (un attimo! state dicendo voi?) e vediamo qualche proprietà.

Io amo me stesso. Gli altri non lo capiscono: qualche volta neanche io. Questa relazione del mio io con me stesso si chiama **riflessiva**. Non perchè ci si pensa molto. Semplicemente parte da un elemento e torna lì.

Paolo ama Francesca e Francesca ama Paolo (se va bene). Relazione **simmetrica**. Finché dura. Proviamo con tre. Francesca ama Paolo, Paolo ama Giuditta quindi Francesca ama Giuditta. Mi sono distratto e mi è venuta una relazione pericolosa. Qui ed ora non ci interessa. Anch'io so mentire. Riproviamo più prosaicamente con l'altezza. Paolo è più alto di Francesca, Francesca più alta di Giuditta: quindi Paolo è più alto di Giuditta. Più noiosa, ma funziona. Si chiama relazione **transitiva**. Se valgono in contemporanea (riflessiva, simmetrica e transitiva) la relazione si chiama di **equivalenza**. Tre in un colpo! Questo tipo di relazione divide l'insieme in parti. Supponiamo che l'insieme sia costituito dagli abitanti di Canicattì e che la relazione sia avere la stessa età. Pensateci un poco e vedrete che la relazione è di equivalenza.

Se no, se vi fidate, andiamo avanti. Tutti gli abitanti dell'insieme hanno un' età (e nessuno ne ha due). Quindi ciascun cittadino è in relazione con altri a formare una **classe di equivalenza**. Gli insiemi dei coetanei formano l'insieme delle parti o **partizione** dell'insieme iniziale. Si ha una partizione quando ogni elemento sta da qualche parte e nessuno in due (speriamo che Lassù non si offenda nessuno visto che Lui sta in ogni luogo, ma non in una partizione).

Domanda: la relazione avere un amante genera una partizione? No, solo gioie e dolori.

A proposito di umane sofferenze, esistono anche altre proprietà. Quella dell'amore non corrisposto è **antisimmetrica**. (Paolo ama Francesca e Francesca non ama Paolo. NB: è la relazione antisimmetrica che crea il sottoinsieme degli sfigati). In generale, oltre a distinguere gli elementi di un insieme in base a qualche proprietà, abbiamo anche l'irresistibile desiderio di mettere ordine nell'insieme secondo un criterio numerico o alfabetico. In quest'ultimo caso Francesca viene prima di Giuditta e Giuditta prima di Paolo. Se ne deduce che, siccome è vero che Francesca precede Paolo, la relazione è transitiva senza essere simmetrica e riflessiva. Per questo motivo i matematici chiamano una **relazione d'ordine** se essa è transitiva ed antisimmetrica. Da $5 < 7 < 9$ si può dedurre $5 < 9$ in base alla transitività. Ma da $5 < 7$ nessuno si sogna di dedurre per simmetria $7 < 5$.

Riassumo: per giocare con gli insiemi non basta prenderli nudi e crudi: è più divertente se si ripartiscono gli elementi in base a qualche proprietà (maschio, femmina o indeciso) o se si mettono in fila (ce l'ho più lungo del tuo e quindi passa dietro). Non tutte le relazioni sono d'ordine o di equivalenza. La vita riserva sorprese. Pensate che una relazione può non essere né simmetrica né antisimmetrica.

Una mania dei matematici (non è la sola!) è quella dell'astrazione. Anche per loro la vita così com'è non è gran che. Si son talmente fissati che hanno formalizzato un procedimento che han chiamato **passaggio al quoziente** senza che c'entri nulla con la divisione (per quello che mi è dato capire) per passare dal concreto all'astratto. Funziona pressappoco così. I cittadini di Cusercoli possono essere ripartiti in base al criterio dell'età. Volendo possiamo pensare ad un **insieme quoziente** i cui elementi sono le varie età (astratte) dei cittadini coetanei (concreti). L'insieme cuori quadri fiori e picche è l'insieme quoziente del mazzo di carte. Date le classi di equivalenza due fiori, due peri, due mani.... due palle l'insieme quoziente ha un solo elemento: il numero due.

Volfango Furgani