



Zeno Martini (admin)

LA REALTÀ DELL'IMMAGINARIO

1 October 2006

Premessa

Qualcuno ha detto che la matematica si può usare ed anche inventare senza conoscerne la storia, ma che senza la storia non la si può apprezzare profondamente. I numeri complessi furono un'invenzione od una scoperta? E' una domanda che si può fare per ogni prodotto del pensiero. Ad ogni modo la loro storia ci insegna che anche le costruzioni della matematica richiedono tempo per maturare. Sono il risultato dei tentativi e dei contributi di tante menti, ognuna delle quali aggiunge qualcosa fino allo sviluppo di una teoria completa. E dopo la maturazione si espandono in svariati campi. Anche la matematica è un aspetto dell'evoluzione.

Ars Magna

Sembra, ora, un gioco facile definire i numeri complessi come numeri aventi la forma algebrica $a+bi$, in cui a e b sono numeri reali dove i , l'unità immaginaria, è un numero tale che il relativo quadrato è -1 . Sostanzialmente una coppia ordinata di reali che permette di definire ciò che nell'insieme dei numeri reali non è possibile: la radice quadrata dei numeri negativi. Ma la resistenza che gli allievi di un istituto tecnico ancora mostrano quando i numeri complessi vengono loro presentati per la prima volta è, probabilmente, il retaggio della loro faticosa e lunga gestazione. Lo sviluppo di questi numeri ha infatti richiesto circa trecento anni. Tutto iniziò, possiamo dire, nel 1545 quando [Girolamo Cardano](#) matematico, medico, e filosofo italiano, pubblicò un libro dal titolo *Ars Magna*. Vi era descritta una procedura algebrica per risolvere le equazioni di terzo grado.

Cardano, Tartaglia e gli altri

La formula presentata da Cardano aveva in realtà già un padre. O meglio due. [Scipione dal Ferro](#), matematico bolognese, fu il primo. Però non rese nota la sua scoperta che gli serviva per vincere le sfide tra matematici, molto in voga in quegli anni perché, oltre all'ammirazione, si poteva puntare a migliorare le proprie entrate pecuniarie. La formula fu indipendentemente riscoperta da Niccolò Fontana, più noto come [Tartaglia](#) per la sua difficoltà di parola. Il matematico veneziano del [famoso triangolo](#), deciso a vincere una *disfida* con Antonio Maria del Fiore, un allievo di Scipione dal Ferro cui il maestro aveva confidato la formula, riuscì a scoprirla per conto suo. Nella *disfida* ciascuno dei contendenti depositava presso un notaio problemi di vario tipo. I problemi erano distribuiti a testimoni oltre che consegnati all'avversario. Una giuria di giudici scelti di comune accordo, decretava il vincitore. Non ci furono difficoltà nel caso specifico per l'attribuzione della

vittoria. Tartaglia risolse tutti i problemi posti dal Fiore in due ore, mentre questi non ne risolse alcuno fra quelli posti da Tartaglia. Siamo nel 1535. Tartaglia non pubblicò la sua formula ma la confidò nel 1539 a Girolamo Cardano, nella speranza, non esaudita, di entrare a far parte del corpo accademico milanese. Cardano insieme all'allievo Luigi (o Ludovico) Ferrari perfezionò la formula e scoprì che già era nota a Scipione dal Ferro. Decise allora di pubblicarla suscitando le ire di Tartaglia che, nella sua opera "*Quesiti et Inventioni diverse*", lo accusò di essere venuto meno al giuramento di tenerla segreta. Le dispute che ne seguirono non ebbero esito positivo per Tartaglia che andò incontro anche a difficoltà finanziarie.

Radicali negativi

Ma torniamo all'opera di Cardano. Egli, oltre alla formula contesa, proponeva anche un problema relativo alle equazioni di secondo grado. Se si dice di dividere 10 in due parti, in modo che le due parti moltiplicate tra loro forniscano il numero 40, risulta abbastanza evidente che il problema è impossibile. Tuttavia, lo si può risolvere in questo modo. Esso corrisponde al sistema costituito dalle equazioni $x + y = 10$ $xy = 40$. Sostituendo nella prima equazione $y = 40/x$ si ottiene l'equazione di secondo grado $x^2 - 10x + 40 = 0$. La soluzione algebrica al problema esiste infatti si può scrivere $x = 5 + \sqrt{-15}$; $y = 5 - \sqrt{-15}$ (o viceversa). La somma è effettivamente 10 ed il prodotto 40. Questo risultato che, sempre con il senno di poi, avrebbe dovuto indurre a meditare sul significato algebrico dei radicali negativi, non spinse però Cardano ad indagare ulteriormente. Egli concluse che il risultato era "sottile quanto inutile". Per l'equazione $x^3 = ax + b$ (forma alla quale può essere ridotta qualsiasi equazione di terzo grado) Cardano mostrò nel suo libro, con due pagine di ragionamenti algebrici di forma retorica che per noi sarebbe difficile seguire, l'esistenza della formula risolutiva. La formula di Cardano, che egli stesso nel suo libro disse che "era dovuta a Luigi Ferrari che l'ha scoperta dietro mia richiesta" era, con le nostre notazioni:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Essa può essere dimostrata in questo modo

Posto $x = u + v$ e sostituendo si ha

$$u^3 + v^3 + 3 \cdot u \cdot v \cdot (u + v) - a \cdot (u + v) - b = 0$$

Si risolve il sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = b \\ (3 \cdot u \cdot v)^3 = (a)^3 \end{cases}$$

ponendo

$$z_1 = u^3, z_2 = v^3$$

si ha che sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$z^2 - b \cdot z + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

la cui formula risolutiva è

$$z = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

da cui, per la posizione inizialmente fatta,

$$x = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$$

da cui, sostituendo,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Per l'equazione particolare $x^3 = 15x + 4$, la formula di Cardano dava (e dà):

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Comparivano di nuovo le famigerate radici quadrate di numeri negativi. Eppure l'equazione ammette tre soluzioni reali: $x = 4$; ed $x = -2 \pm \sqrt{3}$ com'è facile verificare. Cardano di fronte a questo problema, sempre convinto dell'assurdità delle radici quadrate di numeri negativi, decise che la formula non era applicabile a quella equazione, privandola così della generalità che le derivava dalla dimostrazione. L'equazione particolare del resto non era l'unica a presentare quel problema. Anzi, ogni volta che le radici di una equazione di terzo grado sono reali e diverse da zero, la formula porta a radici quadrate di numeri negativi. Si può infatti costruire un'equazione a partire dalle sue radici. Le radici di $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0$ sono evidentemente 1,2,-3. Si ha $a = 7$, $b = -6$. Sostituendo nella formula di Cardano compare ancora la radice quadrata di un numero negativo ($-100/27$).

Bombelli "varca il Rubicone". I numeri complessi nascono

Per noi ora è facile dire che Cardano non ebbe il coraggio di accettarle, ma in lui era più forte la convinzione che cercare la radice quadrata di un numero negativo fosse privo di senso. Il legame dell'algebra alla geometria, così fecondo nel risolvere problemi, lo costringeva a pensare che era inutile cercare il lato di un quadrato inesistente. Non ebbe l'ardire del genio che comprende di essere giunto in una terra di confine e che quello era il segnale che indicava l'inizio di un nuovo mondo. Che fosse sufficiente lasciare semplicemente indicata la radice quadrata del numero negativo e procedere con le comuni regole dell'algebra, come già lo stesso Cardano aveva fatto nel primo problema, è ciò che fece, un paio di decenni dopo, [Raffaele Bombelli](#), un ingegnere idraulico. Con la pubblicazione della sua *Algebra* nel 1572, opera che in realtà egli aveva completato già nel 1560, Bombelli ritenne che la formula di Cardano aveva validità generale semplicemente supponendo che numeri della forma $a + \sqrt{-b}$ esistessero. Poiché $x = 4$ è una soluzione dell'equazione particolare citata e la formula di Cardano per ricavare x comprendeva le due radici cubiche in cui comparivano le radici quadrate dei numeri negativi con segno scambiato, Bombelli ipotizzò che anche le radici cubiche avessero quella forma. Applicando le comuni regole dell'algebra poteva scrivere $a + \sqrt{-b} = a + b \cdot \sqrt{-1}$ con b radice quadrata di b' . Quindi, nel caso specifico, il radicando era $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11 \cdot \sqrt{-1}$. Si doveva trovare il valore di b che soddisfacesse l'equazione $(2 + b \cdot \sqrt{-1})^3 = 2 + 11 \cdot \sqrt{-1}$. Eseguendo i calcoli algebricamente si trova $b=1$. Concluse allora che le due radici cubiche dovevano essere $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$. La loro somma è proprio 4. Il metodo restituiva generalità alla formula risolutiva, e costituì un passo decisivo per l'affermazione dei numeri complessi. Ma lo stesso Bombelli, pur impegnandosi a trovare per quegli strani numeri altri metodi di calcolo, considerava la sua intuizione "un'idea assurda", poiché la giustificazione trovata gli "sembrava poggiare su considerazioni sofistiche". In effetti il ragionamento di Bombelli non costituiva un vero aiuto nella soluzione dell'equazione, in quanto era necessario conoscere preventivamente una delle radici. La situazione che conduceva alla necessità del calcolo delle radici quadrate negative continuò perciò a venire chiamata "il caso irriducibile". La formula di Cardano forniva sì un'espressione per l'incognita, ma la forma in cui era presentata la rendeva inutile allo scopo. Per molti anni ancora, nonostante il lavoro del Bombelli, si continuò a pensare che i numeri complessi fossero uno spreco di tempo. L'idea aveva però cominciato a camminare.

I numeri complessi crescono

Fu il loro ingresso nella matematica favorito dalle idee di Bombelli, che indusse Albert [Girard](#), che nel 1629 pubblicò "*Invention nouvelle en l'algèbre*", ad ammettere l'esistenza di radici negative, nello stabilire le relazioni esistenti tra i coefficienti e le radici di una equazione. Sembra sia anche da attribuire a lui l'affermazione che un'equazione dovesse avere un numero di soluzioni uguale al suo grado, proprio tenendo conto delle misteriose radici quadrate. Un'anticipazione del teorema fondamentale dell'algebra. [Cartesio](#) definì questi numeri, "immaginari". Perché, anche

se si poteva "immaginare" che ogni equazione avesse tante radici quante il suo grado, i numeri reali non potevano corrispondere alle radici immaginate. [Leibniz](#) oltre che applicare le leggi dell'algebra ai numeri complessi, li usò come sussidi di integrazione. Cosa che fece anche [Johann Bernoulli](#). [D'Alembert](#) li impiegò nei suoi calcoli di idrodinamica e tentò, come Eulero e [Lagrange](#) di dimostrare, con il loro ausilio, il teorema fondamentale dell'algebra, che afferma che ogni equazione polinomiale di grado n con i coefficienti complessi ha n radici nel campo dei numeri complessi. [Eulero](#) per primo diede alla radice quadrata di -1 il simbolo i e [De Moivre con la sua formula](#) collegò i numeri complessi alla trigonometria. [Gauss](#) fu il primo a pubblicare la prova corretta del teorema fondamentale di algebra nella sua tesi di laurea di 1797. Ma anch'egli in un primo tempo pensò che era metafisica considerare la radice quadrata di -1 . Dal 1831 Gauss superò definitivamente la sua diffidenza verso questi numeri, pubblicando il lavoro sulla loro rappresentazione geometrica come punti del piano. [Wessel](#), un ispettore norvegese, nel 1797 e, nel 1806, [Argand](#), un impiegato svizzero ottennero risultati simili a Gauss, ma furono ignorati per molto tempo. Gauss, pur non avendoli mai resi noti pubblicamente, aveva annotato in un libretto di appunti parecchi teoremi sulle variabili complesse. Ma fu [Cauchy](#) a pubblicare, fin dal 1814, articoli sempre più consistenti e numerosi sul *Journal* dell'Ecole Polytechnique e sulle pagine dei *Comptes Rendus* dell'Académie sulla teoria delle funzioni a variabile complessa. Mentre è agevole rappresentare graficamente una funzione di variabile reale, in quanto necessita di due dimensioni, non è possibile farlo con le funzioni di variabile complessa che richiedono quattro dimensioni. La mancanza di un supporto visivo rende difficile rappresentare ad esempio il concetto di derivata in un punto che per le funzioni di variabile reale corrisponde alla tangente alla curva in quel punto. Se da un lato questo può rappresentare una difficoltà, dall'altro la necessità di un grado di astrazione maggiore comporta l'esigenza di una più precisa definizione dei concetti. Ed il lavoro di Cauchy impresso il dovuto rigore al nuovo ramo della matematica. I numeri complessi e la teoria delle funzioni analitiche divennero utili in varie discipline, dalla geometria alla teoria dei numeri, dall'elettrotecnica alla meccanica quantistica. Ciò che si credeva impossibile, fittizio e "immaginario" divenne una realtà. Fu [Hamilton](#) a definire i numeri complessi come coppie di numeri reali (a,b) nel 1833. A cose fatte sembrerebbe che per arrivare a questa definizione trecento anni siano molti, abituati come siamo alla vertiginosa velocità dei progressi tecnologici del nostro tempo.

L'evoluzione della natura ha tempi lunghi e forse anche l'evoluzione della mente, specie quando deve aprirsi ad orizzonti completamente nuovi, ha tempi che sfuggono ad una previsione.

Riferimenti bibliografici e sulla rete

- "Storia della Matematica" di Carl B. Boyer ed ISEDI
- [Complex numbers](#)
- [Storia delle equazioni](#)
- http://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale