



Volfango Furgani

INTRODUZIONE AI METODI DI TRASFORMAZIONE

29 August 2002

Io e voi siamo d'accordo forse su di un unico punto: esistono problemi difficili. Anzi problemi astronomicamente difficili. Pensate a Keplero. Mentre cercava di evitare che la mamma finisse al rogo come la nonna, visto che il fuoco della pira era una graziosa consuetudine del tempo, quando la fissazione di essere malato glielo permetteva, cercava una relazione matematica che armonizzasse il moto dei pianeti.

I **numeri** con i quali aveva a che fare erano, guarda un po' **astronomici**. Di più il Nostro, li **elevava a potenza**. Un lavoretto da nulla.

Pensate poi alla difficoltà di **calcolare** una potenza in alternata o **qualunque** altra **grandezza elettrica sinusoidale** con le sole funzioni trigonometriche. Anzi non pensateci, perché non ci avete mai provato salvo che il vostro prof di Elettro non fosse impazzito. Nego fermamente che lo sia sempre stato. Il vostro prof usa i numeri complessi e non lo fa per masochismo. Che sia sadico? A voi l'ardua sentenza.

E che dire di **derivate** ed integrali? E le **equazioni differenziali**?

Di mano a mano che proseguirete nello studio della matematica incontrerete anche questi non facili argomenti (gli integrali, poi, sono la mia bestia nera).

Un esempio che forse a metà della quarta potete digerire. L'equazione $f = m \cdot a$ è ben nota e in questa forma serve a poco o niente, salvo creare qualche difficoltà in prima quando il prof di fisica vi chiese di invertirla. I cervelloni che ne vogliono trarre profitto reale sanno che la velocità è il rapporto fra uno spazio molto piccolo, l'infinitesimo dx , ed il tempuscolo dt impiegato a percorrerlo. Quindi $v = dx/dt$. Siccome l'accelerazione è la rapidità di variazione della velocità si ha $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ e quindi $f = m \cdot d^2x/dt^2$. Questa è l'equazione differenziale che risolsero i geniacci per ottenere qualcosa di nuovo. Equazioni di questo tipo capitano quando volete studiare un sistema meccanico, elettrico, idraulico o quello che sia.

Questi **tre problemi** difficili furono risolti concettualmente con lo **stesso metodo**, da **Nepero**, l'inventore dei logaritmi, **Steinmetz**, un ingegnere americano, se non erro, che doveva fare dei conti sui circuiti in alternata e non amava la noiosa trigonometria

e da **Laplace**, matematico ed astronomo, che sperava di aver risolto il problema del mondo. Niente di più, niente di meno.

Nepero pensò che per fare una moltiplicazione è più comodo lavorare con gli esponenti (i logaritmi) che con i numeri. Gli esponenti in una moltiplicazione si sommano e la somma è più facile della moltiplicazione. Del resto le proprietà dei logaritmi le conoscete per contratto. Gli astronomi, la pigrizia è una componente del genio, lo ringraziarono fino all'invenzione delle macchine da calcolo. I computer sono solo l'ultima in ordine di tempo. I calcoli astronomici sono semplificati dal trasformare i numeri in logaritmi, applicare una operazione più semplice sui logaritmi e poi tornare ai numeri. Un po' macchinoso, ma lo trovavano conveniente. Un metodo di questo tipo si chiama di trasformazione perché modifica un problema in uno analogo più semplice e poi ritorna indietro.

Passiamo a **Steinmetz**. Lui sapeva bene che un circuito lineare non cambia la frequenza che resta 50 o 60 Hz (paese che vai, usanze che trovi) per gli elettrotecnici. Quindi per una grandezza sinusoidale doveva calcolare solo l'ampiezza o modulo e la fase: $v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi)$ è determinata se si conoscono sia V_M che φ . Ma lui, che aveva la trigonometria in antipatia, conosceva i numeri complessi. Lui dico, non mi illudo.

Un numero complesso è rappresentato da un punto del piano. Se ne accorsero il sommo Gauss ed il più normale Argand. La distanza del punto dall'origine si chiama modulo e l'angolo che questo segmento forma con l'asse x fase. Una funzione trigonometrica ed un numero complesso portano entrambi due informazioni, solo che, e qui sta la furbata, le operazioni sui numeri complessi sono algebriche e quindi anche se vi sembrano complesse, perché non dovrebbero esserlo?, sono anche semplici. Almeno più semplici di quelle trigonometriche.

Ma Steinmetz ha dei limiti. Chi non ne ha, a parte il monomaniacale **Laplace**? Che anche la maniacalità sia una componente del genio?

I limiti sono quelli sottintesi in elettrotecnica.

- 1) I generatori hanno tutti la stessa frequenza e
- 2) sono stati applicati da un tempo abbastanza lungo da potersi ritenere i transitori esauriti.

Cioè, gli elementi che immagazzinano energia come induttanze e condensatori, sono già a posto, hanno già avuto l'energia che gli spetta.

Queste due condizioni non sempre possono essere rispettate. La carica e scarica di un condensatore è uno di questi casi. Dopo un tempo abbastanza lungo, il condensatore è, di fatto, arrivato dove voleva e noi non possiamo più studiarne la carica o la scarica che si sono già compiute. Pensate agli ammortizzatori di un'auto. Che senso ha studiarne il comportamento dopo un tempo lungo dall'istante nel quale l'auto è uscita dalla buca? Gli ammortizzatori non servono più fino alla prossima buca.

In buona sostanza, ci sono dei problemi in cui, ad esempio dell'ampiezza V_M della sinusoide non basta trovare un solo valore perché cambia nel tempo. Attenzione: sto parlando del valore di picco, il massimo, non del valore istantaneo!

Del resto, sapete bene che la tensione ai capi di una capacità cambia durante la carica e solo dopo rimane costante. Steinmetz con questi problemi non poteva niente.

Riflettiamo su un fatto. La variabile di Steinmetz non è più il tempo t , ma ω . Che sia costante in elettrotecnica è solo un caso fortuito. In elettronica cambia continuamente, se no allo stereo sentireste solo un fischio. Si dice che siamo passati **dal dominio del tempo a quello della frequenza**. Una variabile indipendente basta perché stiamo studiando casi in cui l'ampiezza è a regime, cioè non cambia. Se cambia, una sola variabile non basta più. Ad ω bisogna associarne una seconda che tenga conto del fatto che anche l'ampiezza può crescere o calare più o meno rapidamente. Di solito si indica con σ e delle due variabili reali ω e σ se ne fa una sola complessa. Non è una novità. Un numero complesso equivale ad una coppia ordinata (prima l'ascissa poi l'ordinata) di numeri reali. E' la famigerata **frequenza complessa $s = \sigma + j\omega$** .

Saltiamo ad una conclusione. Quando si salta (il programma, dico) non si trova mai opposizione.

Ci sono dei valori di s che riassumono il comportamento di certe funzioni $F(s)$ razionali e fratte. Se in questi punti che non sono altro che le radici del denominatore e si chiamano **poli**, σ è > 0 , l'ampiezza cresce tanto più velocemente quanto più σ è grande. Se invece σ è negativo, l'ampiezza decresce. Se, da ultimo, σ vale zero, ricadiamo nel caso di Steinmetz o dell'elettrotecnica dove il valore di picco è costante.

Riassumiamo:

invece di usare **numeri astronomici, funzioni trigonometriche o equazioni differenziali** tipo $v(t) = L \cdot di/dt$ o $i(t) = C \cdot dv/dt$, si **trasformano i problemi** utilizzando rispettivamente i **logaritmi, inumeri complessi** al posto delle $f(t)$ le **$F(s)$ di Laplace**.

Si dice, un po' pomposamente, che si passa *dal dominio oggetto*, il primo, che spesso è il dominio del tempo (con t in ascissa, voglio dire), al secondo, il *dominio immagine*, dove risolvere il problema è tecnicamente più semplice.

Poi si antitrasforma, che vuol dire tornare al dominio da dove il nostro problema è partito.

Bene che vantaggio c'è, in questo girotondo, ad usare le funzioni dell'ottimo Laplace?

Le equazioni da differenziali, che può voler dire difficili, diventano algebriche.

Se sapete fare la derivata di una funzione trigonometrica ce ne possiamo fare un' idea nel dominio della frequenza reale, di Steinmetz.

Supponete che sia $i(t) = I_M \sin(\omega t)$. Si dice che siamo in regime sinusoidale con $\sigma = 0$.

La derivata di $i(t)$ vale, chiedete conferma al prof di matematica se ci siete con il programma, $di/dt = I_M \omega \cos(\omega t)$. Cioè, e questo è il punto, c'è una moltiplicazione per ω , non più una derivata. C'è, avete ragione, anche uno sfasamento di 90° , quello fra seno e coseno. Forse ricordate che se avete un numero reale n (asse delle ascisse, quelle orizzontali, non straparlate) e lo moltiplicate per l'unità immaginaria j , jn finisce sulle ordinate dopo una rotazione di 90° gradi.

Ecco il nuovo collegamento fra le derivate ed i numeri complessi: al posto dell'operatore d/dt , più complicato, usate la moltiplicazione per $j\omega$. Al posto di $v(t) = L \cdot di/dt = I_M \omega \cos(\omega t)$ trovate $v(j\omega) = j\omega L I_M$ che è un'equazione, bene o male, algebrica. C'è j , non si può avere tutto..

Bene, si può dimostrare, e lo farà il prof di Sistemi, se crede, che questa proprietà rimane invariata anche con Laplace. Inoltre al posto di un'integrazione, si può usare una divisione per $j\omega$.

Ho tentato di dar ragione di argomenti, come dire, complessi. Mi scuso con quanti riterranno che ho forzato e quindi stravolto, la realtà delle cose.