

Zeno Martini (admin)

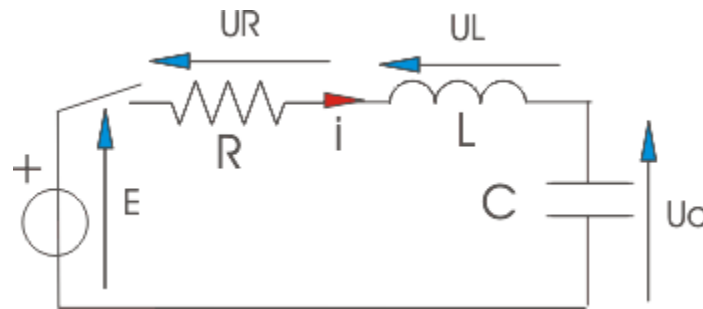
ERRELLECCI: IL TRANSITORIO RLC

15 February 2008

Abstract

L'articolo propone esercitazioni didattiche su circuiti elementari con resistenza, induttanza e capacità, per lo studio in simulazione del transitorio conseguente all'applicazione di una forza elettromotrice. Il metodo seguito è quello illustrato nell'articolo "[Le differenze finite...in un foglio](#)".

Resistenza, induttanza e capacità in serie



Di seguito sono illustrati i passaggi matematici che permettono di scrivere, in base al secondo principio di Kirchhoff, l'equazione differenziale da cui ricavare la corrente. L'equazione differenziale è poi trasformata in una equazione alle differenze finite per costruire il vettore con i valori discretizzati della corrente

Per il secondo p.d.K

$$E = U_L + U_R + U_C$$

da cui l'equazione differenziale

$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t)$$

derivando si ha

$$\frac{de}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_c}{dt}$$

$$C \cdot \frac{de}{dt} = LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + RC \cdot \frac{di}{dt} + C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$C \cdot \frac{de}{dt} = LC \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + RC \cdot \frac{di}{dt} + i$$

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{de}{dt} = \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC}$$

Considerando le differenze finite

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 i}{\Delta t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} + \frac{i}{LC}$$

$$\Delta^2 i + \frac{R}{L} \cdot \Delta i \cdot \Delta t + \frac{i \cdot \Delta t^2}{LC} = \frac{1}{L} \cdot \Delta e \cdot \Delta t$$

Costruiamo i vettori

$$[n] = [1, 2, 3, \dots, N]$$

$$[t] = [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t, t_3 = t_2 + \Delta t, \dots, t_n, \dots, t_N]$$

$$[e] = [e_1, e_2, \dots, e_n, \dots, e_N]$$

$$[i] = [i_1, i_2, \dots, i_n, \dots, i_N]$$

per $n \geq 2$

$$\Delta^2 i_n = \Delta(\Delta i_n) = \Delta(i_{n+1} - i_n) = (i_{n+2} - i_{n+1} - (i_{n+1} - i_n)) = i_{n+2} - 2 \cdot i_{n+1} + i_n$$

$$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n$$

$$i_{n+2} - 2 \cdot i_{n+1} + i_n + \frac{R}{L} \cdot (i_n - i_{n-1}) \cdot \Delta t + i_n \cdot \frac{\Delta t^2}{LC} = (e_n - e_{n-1}) \frac{\Delta t}{L}$$

$$i_{n+2} = i_n \cdot \left(2 - \frac{\Delta t^2}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot \Delta t \right) + i_{n-1} \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot \Delta t - 1 \right) + (e_n - e_{n-1}) \frac{\Delta t}{L}$$

$$e(t) = \begin{cases} 10 & \text{per } \Delta t < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{per } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Il foglio elettronico ha questo aspetto

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	R=	25	250	$2 \cdot L/R =$	0,008	0,0008	$R_c =$	200
2	L=	0,1						
3	C=	0,00001	$\omega_n = 1/(\text{radQ}(\text{LC}))$	1000	$f =$	159,1549	$T_n =$	0,006283
4								
5	$\Delta t =$	6,28319E-05	$i_{n+1} = i_n \cdot \left(2 - \frac{\Delta t^2}{L \cdot C} - \frac{R}{L} \cdot \Delta t \right) + i_{n-1} \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot \Delta t - 1 \right) + (e_n - e_{n-1}) \frac{\Delta t}{L}$					
6								
7								
8	n	t	en	in-R	in-10R			
9	1	0	0					
10	2	6,28319E-05	10					
11	3	0,000125664	10	0,000628319	0,000628			
12	4	0,000188496	10	0,001244287	0,001155			
13	5	0,000251327	10	0,001845668	0,001595			

La colonna B contiene il vettore **[t]** degli istanti. L'alimentazione considerata è una forza elettromotrice costante **E=10 V**, inserita all'istante **t₂=Dt**. Le colonne D ed E contengono il vettore **i_n** con i valori discreti della corrente, per due valori di resistenza, rispettivamente di 25 e 250 ohm. Sono calcolati con la formula scritta in intestazione a partire dall'indice n=3. Ai primi due valori si può attribuire il valore zero commettendo un errore grossolano che scompare per i successivi elementi. Le formule delle celle i-esime sono

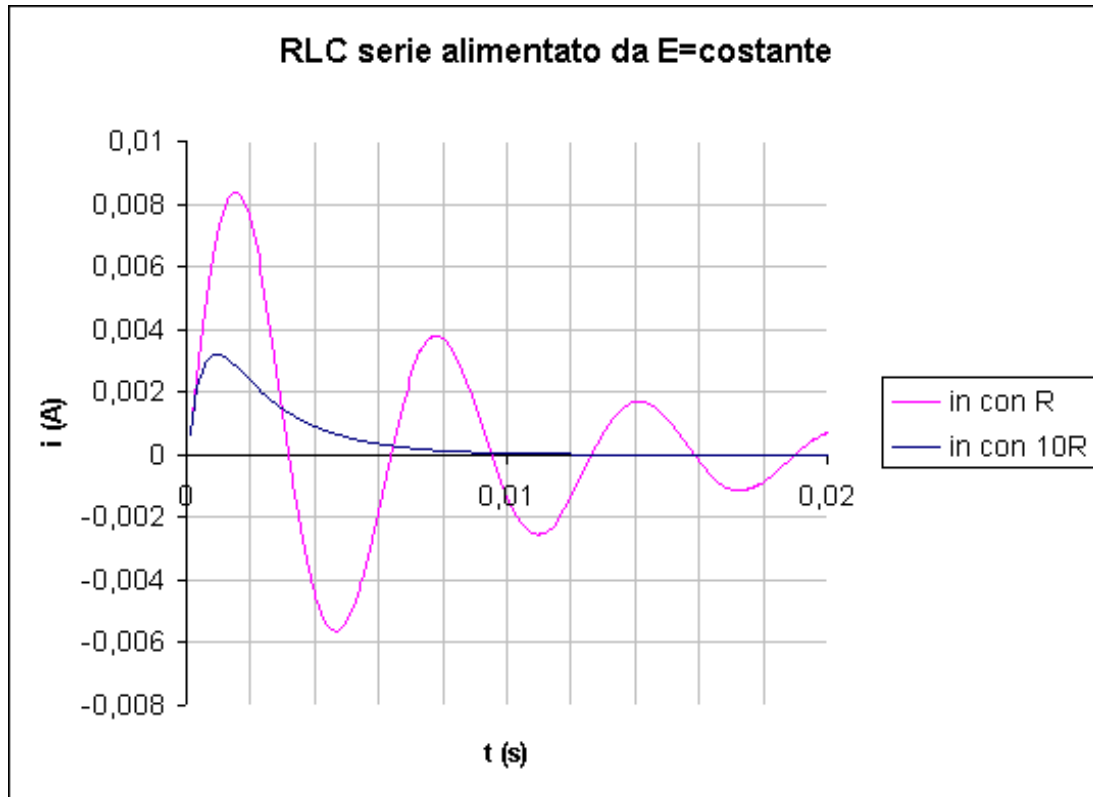
Cella D-iesima:

$$=D_{i-1} \cdot (2 - 2 \cdot B5/E1 - D3^2 \cdot B5^2) + D_{i-2} \cdot (2 \cdot B5/E1 - 1) + (C_{i-1} - C_{i-2}) \cdot B5$$

Cella E-iesima:

$$=E_{i-1} \cdot (2 - 2 \cdot B5/F1 - D3^2 \cdot B5^2) + E_{i-2} \cdot (2 \cdot B5/F1 - 1) + (C_{i-1} - C_{i-2}) \cdot B5$$

I grafici delle correnti sono mostrati nella figura seguente.



Si noti l'oscillazione smorzata della prima corrente (color magenta) che si ha quando la resistenza è inferiore alla resistenza critica data da

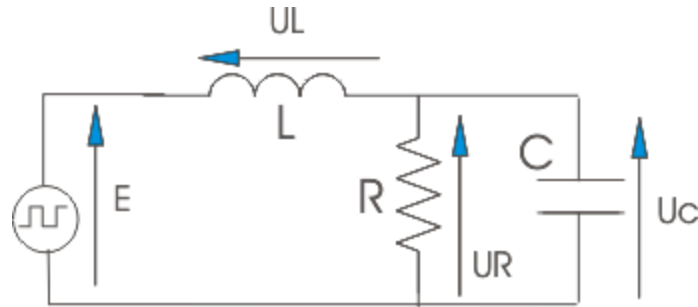
$$R_c = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}},$$

calcolata nella cella **H1** (200 ohm con i valori scelti per R, L, C). L'intervallo Δt che separa gli istanti è stato scelto pari ad un centesimo del periodo dell'oscillazione smorzata, calcolato in H3 (0,00628 s)

NB: I parametri sono modificabili nel foglio scaricabile come descritto in Download. Occorre però tenere presente che spesso in tal caso è necessario adattare le scale del grafico per una corretta visualizzazione. E' indispensabile perciò riferirsi ai manuali per Excel.

Induttanza in serie con resistenza e capacità in parallelo

Consideriamo ora il seguente circuito, lo stesso che conclude l'articolo di Giovanni Scghor, "[Chi ha paura delle equazioni differenziali?](#)"



Si vuole trovare la tensione ai capi della resistenza. Il generatore produce un'onda quadra di tensione. Per ricavare l'equazione differenziale, usiamo il metodo operatoriale, basato sulla trasformata di Laplace. Come noto si può procedere come in alternata. Le impedenze, stavolta, sono le cosiddette impedenze operatoriali:

- $Z_R=R$ per la resistenza;
- $Z_L=sL$ per l'induttanza;
- $Z_C=1/sC$ per la capacità.

Si scrivono le equazioni del circuito in base ai principi di Kirchhoff e si ricavano le grandezze elettriche, non quelle reali, ma le loro trasformate di Laplace. Noi evitiamo però di antitrasformare per determinare le grandezze elettriche reali, ma ci limitiamo a risalire all'equazione differenziale che l'equazione rappresenta, ricordando che moltiplicare per s significa derivare, e dividere per s integrare.

Supponiamo per semplicità che siano nulle le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttanza. Ecco il modo di ricavare l'equazione differenziale di secondo grado per u_R . Essa consente di scrivere l'equazione alle differenze finite, quindi l'espressione indicizzata, per costruire il vettore $u_{R,n}$

Applicando Millmann

$$U_R = \frac{\frac{E}{sL}}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC} = \frac{\frac{E}{L \cdot C}}{s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$\left(s^2 + \frac{s}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}\right) \cdot U_R = \frac{E}{L \cdot C}$$

$$\frac{d^2 u_R}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{L \cdot C} = \frac{e}{L \cdot C}$$

$$\Delta^2 u_R + \frac{\Delta t}{R \cdot C} \cdot \Delta u_R + \frac{u_R}{L \cdot C} \cdot \Delta t^2 = \frac{e}{L \cdot C} \cdot \Delta t^2$$

$$u_{R,n+1} - 2 \cdot u_{R,n} + u_{R,n-1} + \frac{\Delta t}{R \cdot C} \cdot u_{R,n} - \frac{\Delta t}{R \cdot C} \cdot u_{R,n-1} + \frac{u_{R,n}}{L \cdot C} \cdot \Delta t^2 = \frac{e_n}{L \cdot C} \cdot \Delta t^2$$

$$u_{R,n+1} = \left(2 - \frac{\Delta t}{R \cdot C} - \frac{\Delta t^2}{L \cdot C}\right) \cdot u_{R,n} + \left(\frac{\Delta t}{R \cdot C} - 1\right) \cdot u_{R,n-1} + \frac{\Delta t^2}{L \cdot C} \cdot e_n$$

Il foglio elettronico si presenta allora così.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Dt (s)	10	R (ohm)	C (farad)	L (henry)	U (volt)
2		0,00001	0	1000	0,00001	0,1	10
3	n	t	e	uR			
4	1	0	0			DT/(R*C)	DT^2/(L*C)
5	2	0,00001	0			0,001	0,0001
6	3	0,00002	10	0,001			
7	4	0,00003	10	0,002999			
8	5	0,00004	10	0,005996			
9	6	0,00005	10	0,009989			
10	7	0,00006	10	0,014977			
11	8	0,00007	10	0,020958			
12	9	0,00008	10	0,027931			

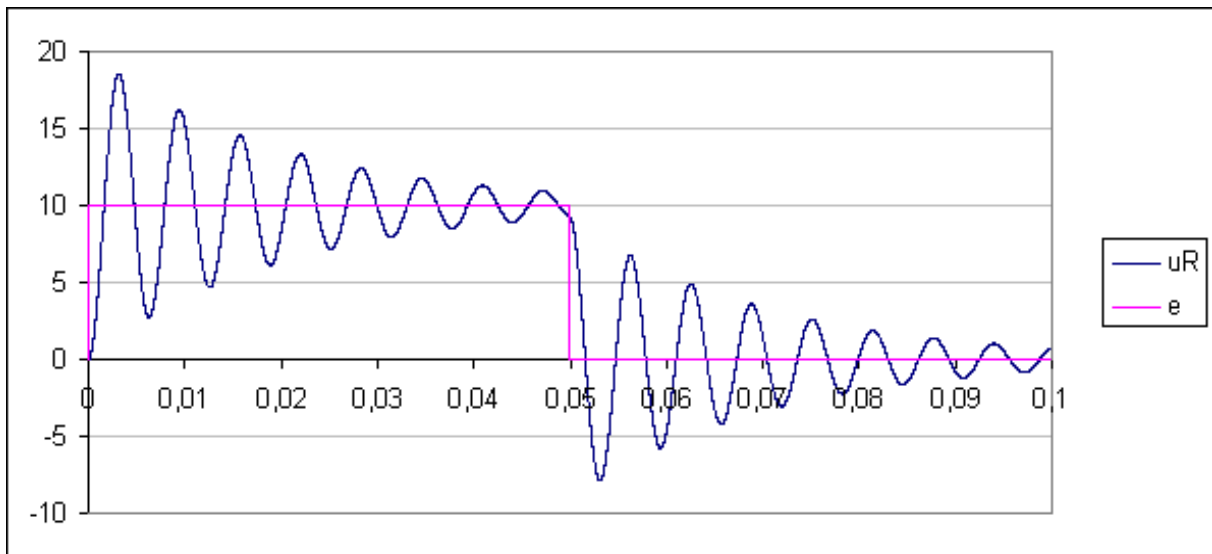
I valori di $R=1000 \text{ ohm}$, $L=0,1 \text{ H}$; $C=10 \text{ microfarad}$ sono posti nelle celle D2,E2,F2. L'intervallo di tempo $Dt=10 \text{ microsecondi}$ è in B2. L'istante iniziale è 0, posto in C2. L'ampiezza dell'onda quadra di 10 V è in G2. Il periodo è 0,1 s. In F5 e G5 sono calcolate due espressioni costanti che compaiono nella formula finale di **uR,n**: **Dt/R*C** e **Dt²/(L*C)**. La colonna B contie il vettore **[t]** degli N=10000 istanti separati da Dt. Nella colonna C c'è il vettore **[e]** con i valori dell'alimentazione, l'onda quadra che assume il valore U=10 V a 20 ms e tora a zero dopo 5000 microsecondi.

Il vettore della tensione cercata, **[uR]** determinato con l'ultima formula scritta è nella colonna **D**.

Nella cella *D i-esima* si ha perciò $=D_i*(2-F\$5-G\$5)+D_{i-1}*(F\$5-1)+C15*G\5 .

Si deve osservare che non è stato detto nulla sui valori iniziali di **uR**, il primo ed il secondo, che la formula non può calcolare. Stavolta il loro valore non è di secondaria importanza come si può osservare modificando il valore delle celle *D4* e *D5*. E' logico che sia così in quanto la tensione iniziale su R indica che il condensatore è carico cosa che influenza il transitorio

Selezionando l'area di dati e scegliendo lo strumento "grafici" - dispersione appare il grafico seguente.



Se il **generatore è sinusoidale**, basta introdurre i parametri che lo caratterizzano: il valore di picco (**Umax**) in H2; la frequenza *f* (**f(Hz)**) in I2, la fase iniziale (**fase°**) in I4

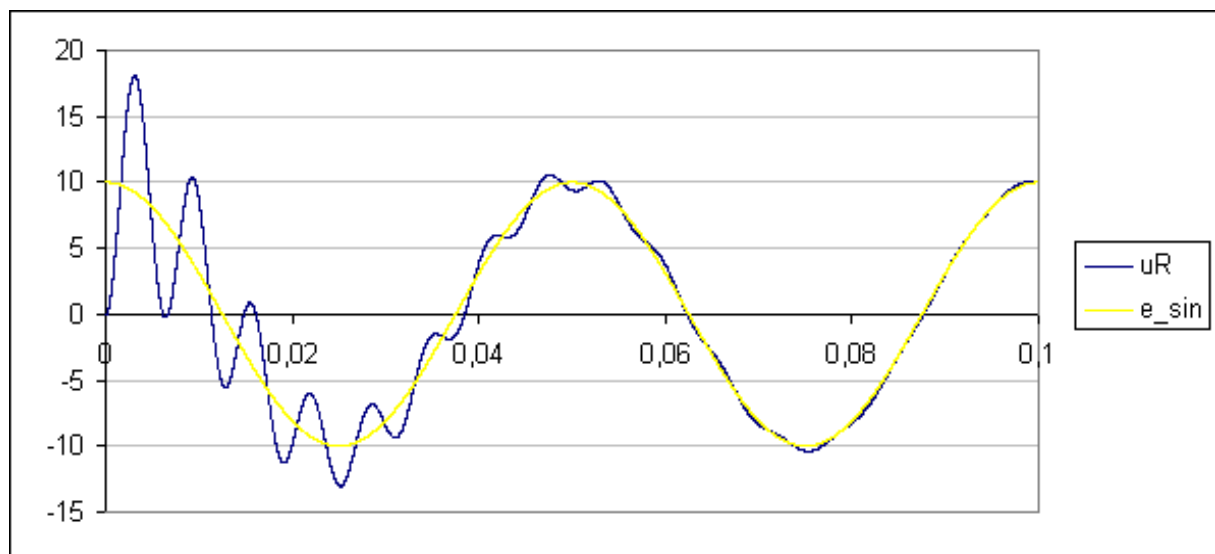
Il foglio si presenta così

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Dt (s)		t0	R (ohm)	C (farad)	L (henry)	Umax (volt)	f (Hz)=
2		0,00001		0	1000	0,00001	0,1	10	20
3	n	t	wt+fase	e_sin	uR				fase °
4	1	0	90	10	0		DT/(R*C)	DT^2/(L*C)	90
5	2	0,00001	90,072	9,999992	0		0,001	0,0001	
6	3	0,00002	90,144	9,999968	0,001				
7	4	0,00003	90,216	9,999929	0,002999				
8	5	0,00004	90,288	9,999874	0,005995				
9	6	0,00005	90,36	9,999803	0,009988				
10	7	0,00006	90,432	9,999716	0,014976				
11	8	0,00007	90,504	9,999613	0,020958				

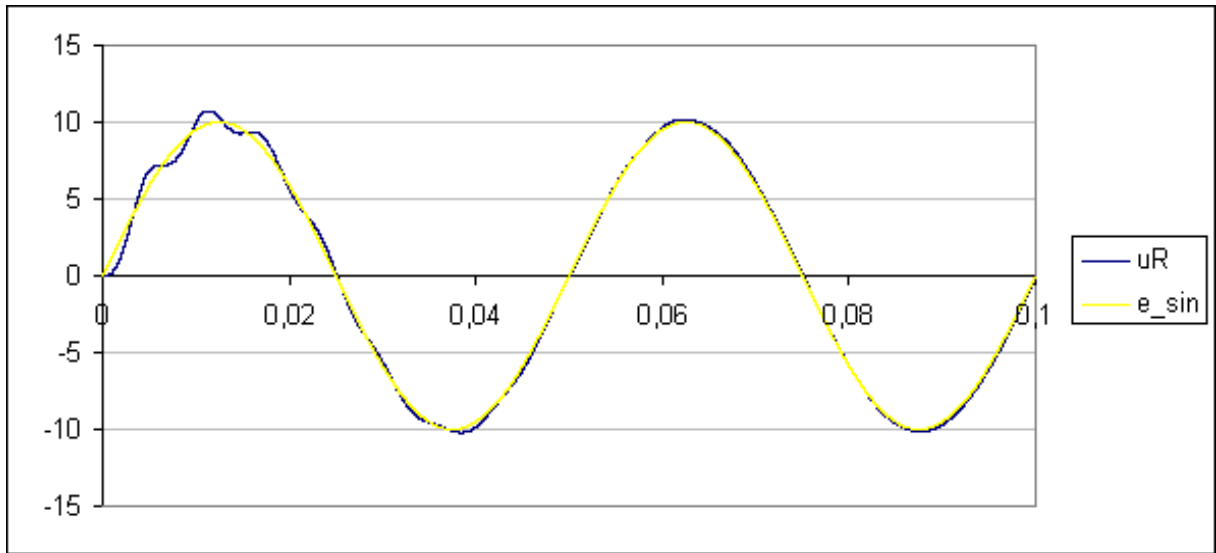
Nella colonna C c'è il vettore [wt+fase], l'argomento in gradi della funzione seno, mentre la colonna D contiene il vettore [e_sin]. Quindi le formule scritte nelle celle sono:

- Cella C i-esima: **=GRADI(2*PI.GRECO()*I\$2*Bi)+I\$4**
- Cella D i-esima: **=\$H\$2*SEN(RADIANTI(C5))**

Il grafico che si ottiene è il seguente con i valori impostati è il seguente.



Nel foglio si possono ovviamente modificare i diversi parametri. Ad esempio con **fase = 0°** l'andamento della uR è



Download

La cartella **ADDFexc2.xls** , contenente le esercitazioni proposte, è contenuta in [questo file](#)