Zeno Martini (admin)

UNO SGUARDO SUL PONTE DI WHEATSTONE

23 February 2008

Scopo

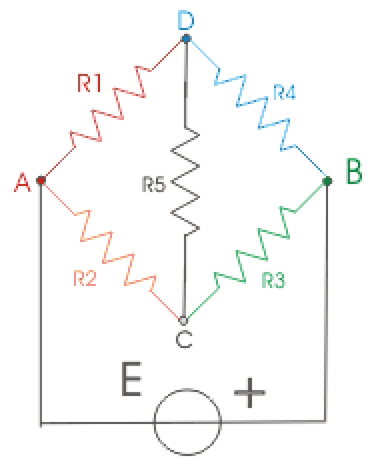
Le incertezze di molti studenti di fronte alla semplice struttura del ponte di Wheatstone segnalano un difetto di comunicazione. Una delle ragioni è senz'altro un'attenzione superficiale alla lezione e nello studio. L'articolo cerca di suscitare l'interesse stimolando la curiosità attorno all'oggetto ponte, rigirato sotto le luci dei principali procedimenti di analisi delle reti.

Prologo

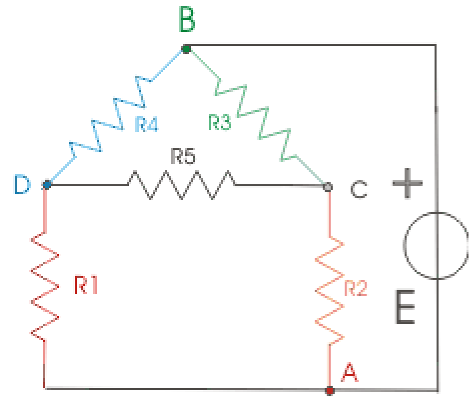
Il più frequente collegamento di resistenze sul quale i ragazzi che, per necessità ed anche per desiderio di sapere (non escludiamolo), pongono domande, è la configurazione con cui Wheatstone, fisico britannico del XIX secolo, mise a punto un metodo per misurare con precisione una resistenza. Il ponte di Wheatstone costituisce un'esperienza tradizionale in un laboratorio di misure elettriche, eseguita in diversi modi con strumentazione integrata in un'unica apparecchiatura o con elementi separati. Capita spesso che i ragazzi, insuperabili nel compartimentare non solo le materie diverse, ma anche quelle simili, di fronte ad un esercizio di elettrotecnica non sappiano riconoscere, nel collegamento che li mette in difficoltà, il circuito sul quale hanno già fatto l'esperienza in laboratorio. L'insegnante di elettrotecnica poi, sadicamente, tende loro subdoli tranelli, disegnando la disposizione delle resistenze in modo diverso, approfittando della loro ostinazione a trascurare il significato e la rappresentazione di un collegamento equipotenziale. C'è allora chi individua serie e paralleli inesistenti, mentre non si accorge di quelli veri; non riconosce triangoli elettrici perché geometricamente vede solo rettangoli od è vittima di altre illusioni ottiche o mentali. Quando nel forum arriva una richiesta di aiuto, c'è un affollamento di risposte: gli esperti propongono le loro soluzioni preferite ed i meno esperti piazzano il colpo sbagliato.

Il ponte di Wheatstone

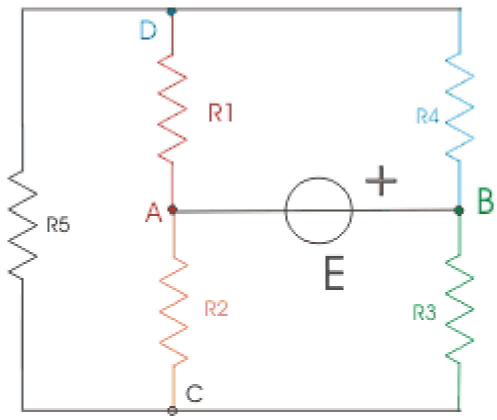
Ma vediamolo questo benedetto circuito, in alcune delle forme in cui la malizia di un prof., crescente dalla prima all'ultima figura, lo può disegnare



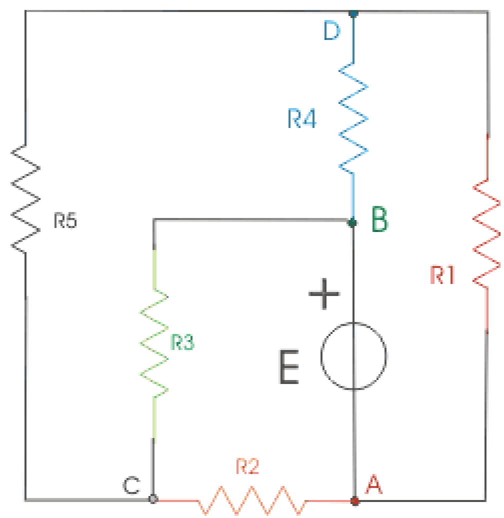
pW 1



pW 2



pW 3



pW 4

Le domande possono essere molteplici

1. Qual è la resistenza equivalente vista dai terminali del generatore, ad esempio;
2. quanto vale la tensione ai capi di R_5;
3. quanto deve essere il valore di R_3 affinché la corrente in R_5 sia nulla;
4. ....e via discorrendo. (intercalare molto usato dal "Giovane Holden", il protagonista del famoso romanzo di J.D. Salinger: Non c'entra nulla con il ponte, ma è un classico che val la pena di leggere)

Molto spesso i ragazzi (ma forse ancor di più i loro genitori) sono convinti che tanti esercizi, diversi tra loro, siano indispensabili per diventare abili nelle materie tecniche. Non è un'idea completamente errata, ma spesso dimenticano che occorre innanzitutto capire bene alcuni concetti fondamentali. (E' un modo per evitare di dire una frase scontata: non è la quantità degli esercizi che conta ma la qualità del come li si fa).

I concetti necessari per risolvere una rete elettrica non sono molti. Data per scontata la corretta conoscenza di tensione e corrente, e dei bipoli fondamentali (generatori e bipoli passivi), sono sufficienti i due principi di Kirchhoff. Alle domande precedenti si può rispondere proprio risolvendo il sistema di equazioni a cui essi danno luogo. E' necessario però scriverle senza sbagliare una virgola. Beh, in effetti le virgole in fondo i ragazzi non le sbagliano anche perché, a parte quelle dei valori numerici dei coefficienti, altre non ce ne sono. In compenso sbagliano il resto, soprattutto i segni, specie nel secondo principio per il quale sono in grado di inventare maglie impossibili. Sto parlando non di tutti gli studenti, ovviamente, ma oserei dire della maggioranza, di quelli almeno che conosco.

I due principi di Kirchhoff, dobbiamo dirlo, non appagano molto nella soluzione manuale. Consentono di scrivere facilmente il sistema di equazioni che però è noioso risolvere e che fa vedere poco delle peculiarità del circuito. Ci sono altri metodi che danno maggiori soddisfazioni, o perché riducono il numero di equazioni, o perché scompongono il circuito strutture più semplici e maneggevoli, come fosse un oggetto da smontare per vedere com'è fatto.

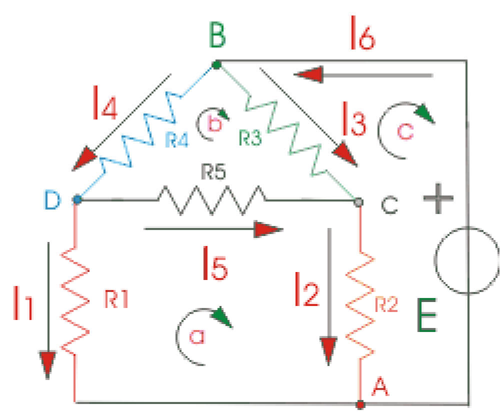
Ritorniamo allora sul ponte e riprendiamo le domande lasciate in sospeso, rispondendovi i più modi. I ragazzi tendono a considerare inutili le variazioni sullo stesso tema, ma trovare per vie diverse lo stesso risultato, oltre che essere divertente, accresce il senso di sicurezza sulle proprie abilità acquisite.

Puro Kirchhoff

Usiamo dapprima i principi di Kirchhoff allo stato puro. Dò per noti i loro enunciati che ognuno trova sul testo che possiede o nelle lezioni di Electroportal Siano note le resistenze e la fem E.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 470\ \Omega \\
R_2 &= 330\ \Omega \\
R_3 &= 220\ \Omega \\
R_4 &= 680\ \Omega \\
R_5 &= 1500\ \Omega \\
E &= 24\ V
\end{aligned}
$$

Calcoleremo le correnti nei rami. La prima cosa da fare (e che la maggioranza di ragazzi cui accennavo si guarda bene dal fare) è di fissare arbitrariamente il verso delle correnti nei rami. Poi, sempre arbitrariamente, si sceglie un verso di percorrenza per ogni maglia indipendente



pW 5

Con il I pdK si scrivono le equazioni per i nodi B,C e D; con il II per le maglie (R_1,R_5,R_2); ((R_4,R_3,R_5); (R_3,R_2,E). Il consiglio, quasi mai seguito perché ritenuto una pignoleria, è di scrivere le equazioni in modo ordinato, incolonnando le correnti con lo stesso indice. L'ordine nella scrittura matematica non fa di nessuno un genio, ma consente a tutti un salto di qualità. La chiarezza grafica elimina gli errori più stupidi.

$$\begin{cases} & & -I_3 & -I_4 & & +I_6 & = & 0 \\ -I_1 & & & +I_4 & -I_5 & & = & 0 \\ & -I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\ & & +R_3 \cdot I_3 & -R_4 \cdot I_4 & -R_5 \cdot I_5 & & = & 0 \\ -R_1 \cdot I_1 & +R_2 \cdot I_2 & & & +R_5 \cdot I_5 & & = & 0 \\ & -R_2 \cdot I_2 & -R_3 \cdot I_3 & & & & = & -E \end{cases}$$

$$\begin{cases} & & -I_3 & -I_4 & & +I_6 & = & 0 \\ -I_1 & & & +I_4 & -I_5 & & = & 0 \\ & -I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\ & & +220 \cdot I_3 & -680 \cdot I_4 & -1500 \cdot I_5 & & = & 0 \\ -470 \cdot I_1 & +330 \cdot I_2 & & & +1500 \cdot I_5 & & = & 0 \\ & -330 \cdot I_2 & -220 \cdot I_3 & & & & = & -24 \end{cases}$$

Ora non rimane che risolvere il sistema scritto. Operazione noiosissima e poco gratificante se fatta a mano, ma che possiamo affidare al computer, dato che abbiamo la fortuna di essere suoi contemporanei. I calcoli per il computer sono tutti uguali, più che gli uomini di fronte alla legge. Qui si può trovare come utilizzare il programma Scilab per tale scopo. La scrittura più efficace per l'operazione con il computer è quella matriciale.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 220 & -680 & -1500 & 0 \\ -470 & 330 & 0 & 0 & 1500 & 0 \\ 0 & -330 & -220 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \end{vmatrix}$$

Ecco le soluzioni del sistema.

(Nota: i risultati dei calcoli seguenti sono lasciati con tutte le cifre fornite dal software. Dopo la terza cifra significativa non hanno in pratica alcun senso quindi, ad esempio, 22,291022 mA in realtà è da intendere come 22,3 mA, una precisione precisione più che sufficiente in generale)

- I_1 = 22.291022 mA
- I_2 = 42.67479 mA
- I_3 = 45.078724 mA
- I_4 = 19.887088 mA
- I_5 = -2.4039337 mA
- I_6 = 64.965812 mA

Ed ecco il codice che basta copiare ed incollare nella finestra di Scilab per ottenerle.

```
txt=['R1=';'R2=';'R3=';'R4=';'R5=';'E='];
R=evstr(x_mdialog('resistenze ed alimentazione',txt,['470';'330';'220';'680';'1500';'24']));
Mponte=[0 0 -1 -1 0 1;-1 0 0 1 -1 0;0 -1 1 0 1 0;0 0 R(3) -R(4) -R(5) 0;-R(1) R(2) 0 0 R(5) 0;0 -R(2) -R(3) 0 0 0];
Nponte=[0 0 0 0 0 -R(6)];
I=linsolve(Mponte,-Nponte');
ImA=1000*I
```

Alla prima domanda si risponde con R_{eq}= E/I_6: basterebbe dunque calcolare anche solo la corrente I_6, ma il computer non fatica molto a trovarle tutte. Quindi

R_{eq} = 1000*24/64.965812 = 369,42 *W*

Anche per rispondere alla seconda basterebbe calcolare una corrente, la I_5:

U_{DC} = R_5*I_5 = 1,5*(-2.4039337) = -3,0659 *V* .

La risposta alla terza non è invece immediata. Le equazioni si possono scrivere ancora ponendo I_5= 0 considerando incognita R_3. Purtroppo però ora c'è il prodotto di due incognite per cui il sistema non è più lineare. Ma non bisogna scoraggiarsi né sostenere che Kirchhoff puro non ce la fa. Basta infatti non pretendere di calcolare immediatamente R_3 con il sistema, ma determinare l'espressione di I_5, che risulterà funzione di R_3 , ed imporre che sia uguale a zero. In tal modo si ottiene un'equazione di primo grado in R_3, la cui soluzione è la risposta.

Utilizzeremo il metodo di Cramer. Occorre saper calcolare il determinante di matrici quadrate di qualsiasi ordine. Per rinfrescare le nozioni può essere utile la pagina già citata. Ecco comunque il procedimento.

$$\begin{cases} & & -I_3 & -I_4 & & +I_6 & = & 0 \\ -I_1 & & & +I_4 & -I_5 & & = & 0 \\ & -I_2 & +I_3 & & +I_5 & & = & 0 \\ & & +R_3 \cdot I_3 & -R_4 \cdot I_4 & -R_5 \cdot I_5 & & = & 0 \\ -R_1 \cdot I_1 & +R_2 \cdot I_2 & & & +R_5 \cdot I_5 & & = & 0 \\ & -R_2 \cdot I_2 & -R_3 \cdot I_3 & & & & = & E \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{I_5} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & E & 0 \end{vmatrix} = -E \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -E \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 \\ -R_1 & R_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = E \cdot \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & R_3 & -R_4 \\ R_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & R_3 \\ -R_1 & R_2 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= E \cdot \left[R_2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R_3 & -R_4 \end{vmatrix} + R_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -R_1 & R_2 \end{vmatrix} \right] = E \cdot \left(-R_4 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 \right)$$

$$I_5 = \frac{\Delta_{I_5}}{\Delta} = 0 \Rightarrow \Delta_{I_5} = 0 \Rightarrow E \cdot \left(-R_4 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_4 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 \Rightarrow R_3 = \frac{R_4 \cdot R_2}{R_1} = \frac{680 \cdot 330}{470} = 477{,}4468$$

La relazione finale tra le quattro resistenze che costituiscono il quadrilatero sulle cui diagonali stanno il generatore e la resistenza in cui si impone la corrente nulla, è proprio il principio su cui si base il metodo per la misura di una resistenza incognita. Al posto della resistenza R_5 c'è un rivelatore di zero, un strumento cioè in grado di misurare con precisione quando la corrente che lo attraversa è nulla. Quando ciò succede le resistenze devono soddisfare la relazione scritta, con la quale si calcola la resistenza incognita R_3. Per ricordare facilità la relazione basta osservare che i prodotti delle resistenze dei lati opposti del quadrilatero sono uguali.

Il ponte di Wheatstone è adatto alla misura di medie resistenze (comprese tra 10 W e 100 kW). Inoltre trova largo impiego nei trasduttori ogni volta che una grandezza fisica può dar luogo ad una variazione di resistenza. Ad esempio la temperatura, opporre una deformazione.

La trasformazione stella-triangolo

Ai ragazzi piace abbastanza il calcolo della resistenza equivalente. Tendono però a credere che le resistenze siano o in serie od in parallelo e spesso confondono il concetto di parallelo elettrico con il parallelo geometrico. Quindi è facile sentirli dire, quando osservano il circuito pW 2 che R_1 è in parallelo ad R_2; se invece guardano il pW 3 le dicono in serie, come R_3 ed R_4 mentre dicono in parallelo R_1 con R_4 ed R_2 con R_3. Nessuna delle loro affermazioni è vera e se riflettessero sulla definizione di serie e parallelo (di cui dimenticano essenza ed esistenza) si accorgerebbero subito che nessuna delle cinque resistenze è in serie od in parallelo a qualsiasi altra. Ed allora che si fa? Viene in aiuto la definizione di stella di resistenze, di triangolo e, soprattutto, la possibilità di trasformare l'uno nell'altra e viceversa, rispettando l'equivalenza. Imparando a riconoscere triangoli e stelle nonché a sostituirli l'uno con l'altro, ci si riconduce a schemi più amichevoli con resistenze finalmente in serie od in parallelo. Quindi si procede verso la sospirata resistenza equivalente. Le formule di trasformazione ed il procedimento seguito sono illustrati in questa pagina.

Ecco i calcoli

$$R_B = \frac{R_4 \cdot R_3}{R_4 + R_3 + R_5} = \frac{680 \cdot 220}{680 + 220 + 1500} = 62,33$$

$$R_D = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_3 + R_5} = \frac{680 \cdot 1500}{680 + 220 + 1500} = 425$$

$$R_C = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_4 + R_3 + R_5} = \frac{220 \cdot 1500}{680 + 220 + 1500} = 137,5$$

$$\mathrm{R}_{eq} = R_B + \frac{(R_D + R_1) \cdot (R_C + R_2)}{R_D + R_1 + R_C + R_2} = 62,33 + \frac{(425 + 62,33) \cdot (137,5 + 330)}{425 + 62,33 + 137,5 + 330} = 369,425$$

Sono calcoli che si possono fare a mano; ma se si è già nella finestra di Scilab basta copiare ed incollare le seguenti righe di codice

```
Req1=R(6)/I(6);

UDC=R(5)*I(5);
```

Per la terza domanda ci troviamo ancora un po' nei guai. Sono necessari molti passaggi algebrici. Ci si arma allora di pazienza e si procede con ordine. Si calcolano le correnti su R_1 ed R_2, quindi la tensione su queste resistenze la cui differenza è la tensione U_{DC}. Si uguaglia a zero questa tensione ottenendo un'equazione in R_3, la stessa di prima evidentemente (e per fortuna al primo tentativo anche. Ma se così non fosse stato dovevamo con pazienza rivedere tutti i passaggi perché si deve trovare sempre la stessa condizione)

$$I_6 = \frac{E}{R_{eq}}$$

$$I_1 = I_6 \cdot \frac{R_C + R_2}{R_C + R_2 + R_D + R_1}$$

$$I_2 = I_6 \cdot \frac{R_D + R_1}{R_C + R_2 + R_D + R_1}$$

$$U_{DA} = R_1 \cdot I_1$$

$$U_{CA} = R_2 \cdot I_2$$

$$U_{DC} = R_5 \cdot I_5 = U_{DA} - U_{CA} = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 = I_6 \cdot \left(R_1 \cdot \frac{R_C + R_2}{R_C + R_2 + R_D + R_1} - R_2 \cdot \frac{R_D + R_1}{R_C + R_2 + R_D + R_1} \right) =$$

$$= \frac{E}{\left(R_B + \frac{(R_D + R_1) \cdot (R_C + R_2)}{R_D + R_1 + R_C + R_2} \right) \cdot (R_C + R_2 + R_D + R_1)} \cdot \left(R_1 \cdot (R_C + R_2) - R_2 \cdot (R_D + R_1) \right) =$$

$$= \frac{E \cdot \left(R_1 \cdot (R_C + R_2) - R_2 \cdot (R_D + R_1) \right)}{\left(R_B \cdot (R_D + R_1 + R_C + R_2) + (R_D + R_1) \cdot (R_C + R_2) \right)} = 0$$

$$\left(R_1 \cdot (R_C + R_2) - R_2 \cdot (R_D + R_1) \right) = 0$$

$$R_1 \cdot R_C + R_1 \cdot R_2 - R_2 \cdot R_D - R_2 \cdot R_1 = 0$$

$$R_1 \cdot R_C - R_2 \cdot R_D = 0$$

$$R_1 \cdot \frac{R_3 \cdot R_5}{R_4 + R_3 + R_5} - R_2 \cdot \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_3 + R_5} = 0$$

$$R_1 \cdot R_3 \cdot R_5 - R_2 \cdot R_4 \cdot R_5 = 0$$

$$R_1 \cdot R_3 = R_4 \cdot R_2$$

Trucchi matematici

Se la scrittura dei sistemi piace, nella consapevolezza poi che per i sistemi lineari si possono facilmente impostare programmi al computer per la loro soluzione, dà una certa soddisfazione scoprire i trucchi per scrivere il minor numero di equazioni possibile. Ne esistono due ed entrambi consistono in un cambio delle incognite da calcolare. Sono il metodo delle *correnti di maglia*, dove le incognite sono ipotetiche correnti circolanti in tutti i rami della maglia considerata, ed il metodo dei *potenziali di nodo* dove le incognite sono appunto i potenziali dei nodi. I due metodi sono già illustrati in [lezioni del sito] e ad esse si rimanda . Mostreremo comunque come risolvere il nostro ponte usandoli entrambi.

Correnti di Maglia

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_5)\cdot i_a - R_5\cdot i_b - R_2\cdot i_c = 0 \\ -R_5\cdot i_a + (R_3+R_4+R_5)\cdot i_b - R_3\cdot i_c = 0 \\ -R_2\cdot i_a - R_3\cdot i_b + (R_3+R_2)\cdot i_c = -E \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3+R_4+R_5 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_3+R_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{vmatrix}$$

Le correnti reali sono $I_6 = - i_c$ ed $I_5 = i_a - i_b$

La soluzione del sistema dà

- $i_a = - 0.0222910\ A$
- $i_b = - 0.0198871\ A$
- $i_c = - 0.0649658\ A$

La si trova, sempre nell'ipotesi di essere nella finestra già lanciata di Scilab, copiando ed incollando le seguenti righe di codice

```
//Correnti di maglia
Mmaglie=[R(1)+R(2)+R(5)-R(5)  -R(2);-R(5)  R(3)+R(4)+R(5)  -R(3);-R(2)  -
R(3) R(3)+R(2)];
Nmaglie=[0;0;-R(6)];
im=linsolve(Mmaglie,-Nmaglie);
I6mA=-im(3)*1000
UDCm=R(5)*(im(1)-im(2))
```

Alla terza domanda si risponde ancora ricavando l'equazione in R_3 che deriva dall'imposizione di $I_5= 0$ che ora diventa $i_a= i_b$. Quest'ultima condizione impone l'uguaglianza dei numeratori delle frazioni che calcolano le due correnti applicando la regola di Cramer

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_5 & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & R_3+R_4+R_5 & -R_3 \\ -R_2 & -R_3 & R_3+R_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{vmatrix}$$

$$\Delta i_a = \begin{vmatrix} 0 & -R_5 & -R_2 \\ 0 & R_3+R_4+R_5 & -R_3 \\ -E & -R_3 & R_3+R_2 \end{vmatrix} = -E \cdot \left[R_5 \cdot R_3 + R_2 \cdot \left(R_3+R_4+R_5 \right) \right]$$

$$\Delta i_b = \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_5 & 0 & -R_2 \\ -R_5 & 0 & -R_3 \\ -R_2 & -E & R_3+R_2 \end{vmatrix} = E \cdot \left[-R_3 \cdot \left(R_1+R_2+R_5 \right) - R_5 \cdot R_2 \right]$$

$$-E \cdot \left[R_5 \cdot R_3 + R_2 \cdot \left(R_3+R_4+R_5 \right) \right] = E \cdot \left[-R_3 \cdot \left(R_1+R_2+R_5 \right) - R_5 \cdot R_2 \right]$$

$$-R_5 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 - R_2 \cdot R_5 = -R_3 \cdot R_1 - R_3 \cdot R_2 - R_3 \cdot R_5 - R_5 \cdot R_2$$

$$R_3 \cdot R_1 = R_2 \cdot R_4$$

Potenziali di nodo

$$V_A = 0; V_B = E$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} \right) \cdot V_D - \frac{1}{R_5} \cdot V_C = \frac{E}{R_4} \\ -\frac{1}{R_5} \cdot V_D + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot V_C = \frac{E}{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_D \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E}{R_4} \\ \frac{E}{R_3} \end{vmatrix}$$

Il sistema permette di ricavare V_D e V_C,

Quindi $U_{DC} = V_D - V_C$

mentre è $I_6 = I_4 + I_3 = (V_B - V_D) / R_4 + (V_B - V_A) / R_3$

Ecco le righe di codice per Scilab

```
//Potenziali di nodo
VA=0;
VB=R(6);
```

```
Mnodi=[1/R(1)+1/R(5)+1/R(4) -1/R(5);-1/R(5) 1/R(3)+1/R(5)+1/R(2)];
Nnodi=VB*[1/R(4);1/R(3)];
V=linsolve(Mnodi,-Nnodi)
UDCn=V(1)-V(2)
I6n=(VB-V(1))/R(4)+(VB-V(2))/R(3)
```

Osserviamo che eseguendo le operazioni con il computer otteniamo comunque gli stessi risultati praticamente nello stesso tempo e non ci accorgiamo dei trucchi. Il trucco l'utilizza chi scrive il programma ovviamente. Il computer esegue, senza protestare, qualunque numero di calcoli gli sia richiesto.

Per la risposta alla terza domanda procediamo come già visto più volte. Ora basta imporre $V_D=V_C$

$$\Delta V_D = \begin{vmatrix} \frac{E}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ \frac{E}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E}{R_4} & -\frac{1}{R_5} \\ \frac{E}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_2} \end{vmatrix} = E \cdot \left[\frac{1}{R_4} \cdot \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_5 \cdot R_3} \right] =$$

$$= E \cdot \left(\frac{1}{R_4 \cdot R_3} + \frac{1}{R_4 \cdot R_5} + \frac{1}{R_4 \cdot R_2} + \frac{1}{R_5 \cdot R_3} \right)$$

$$\Delta V_C = \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_4} & \frac{E}{R_4} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{E}{R_3} \end{vmatrix} = E \cdot \left[\frac{1}{R_3} \cdot \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_4} \right) + \frac{1}{R_4 \cdot R_5} \right] =$$

$$= E \cdot \left(\frac{1}{R_3 \cdot R_1} + \frac{1}{R_3 \cdot R_5} + \frac{1}{R_3 \cdot R_4} + \frac{1}{R_4 \cdot R_5} \right)$$

$$\Delta V_D = \Delta V_C$$

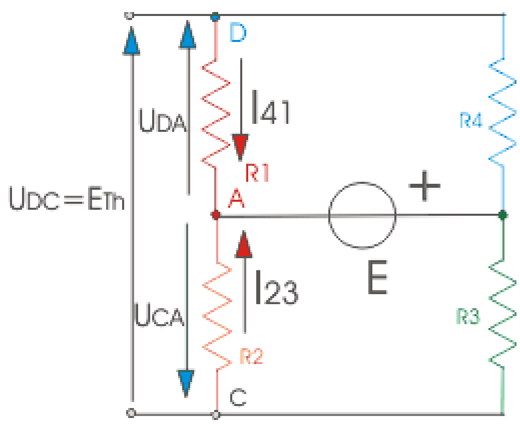
$$\frac{1}{R_4 \cdot R_3} + \frac{1}{R_4 \cdot R_5} + \frac{1}{R_4 \cdot R_2} + \frac{1}{R_5 \cdot R_3} = \frac{1}{R_3 \cdot R_1} + \frac{1}{R_3 \cdot R_5} + \frac{1}{R_3 \cdot R_4} + \frac{1}{R_4 \cdot R_5}$$

$$R_3 \cdot R_1 = R_4 \cdot R_2$$

Thevenin

Concludiamo il nostro sguardo sul ponte con il metodo di analisi del generatore equivalente o, brevemente con Thevenin , dal nome dell'ingegnere francese che ne perfezionò la teoria. Lo applicheremo per rispondere alla terza domanda. E' il più bello perché, non solo ci permette di trovare il risultato (che già conosciamo), ma di farlo in modo che ci fa cogliere meglio le caratteristiche del funzionamento come strumento di misura o trasduttore. Per l'enunciato di Thevenin rimandiamo alla pagina del sito che lo tratta, o al testo di elettrotecnica che si preferisce, (visto che quella di EP ha ricevuto una valutazione solo più che sufficiente), o ad altre pagine in internet ad esempio di Wikipedia.

Si tratta dunque di ricavare il bipolo generatore che alimenta la resistenza R_5. Si immagina allora di togliere tale resistenza, determinare la tensione che si presenta in queste condizioni tra i punti D e C, brevemente tensione a vuoto o forza elettromotrice di Thevenin, in serie a cui inserire la resistenza equivalente vista tra quei due punti dopo aver annullato l'azione del generatore, cioè dopo aver posto E=0. I procedimenti sono illustrati con riferimento rispettivamente alle fig. pW 6 e pW 7.



pW 6

$$U_{DC} = E_{Th} = U_{DA} - U_{CA}$$

$$U_{DA} = R_1 \cdot I_{41} = R_1 \cdot \frac{E}{R_1 + R_4}$$

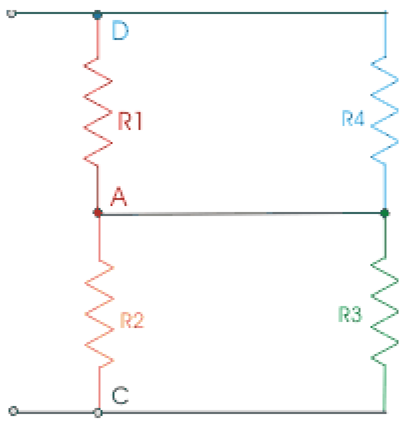
$$U_{CA} = R_2 \cdot I_{23} = R_2 \cdot \frac{E}{R_2 + R_3}$$

$$E_{Th} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_4} - E \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$E_{Th,1} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_4}$$

$$E_{Th,2} = E \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$E_{Th} = E_{Th,1} - E_{Th,2}$$



pW 7

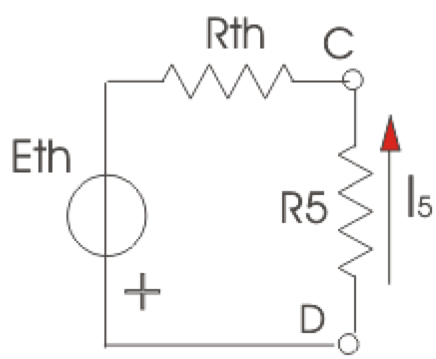
$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{Th,1} = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4}$$

$$R_{Th,2} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

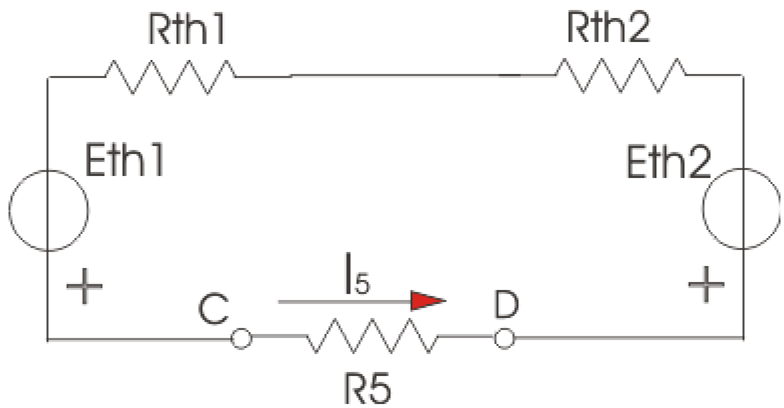
$$R_{Th} = R_{Th,1} + R_{Th,2}$$

Ed ecco il circuito che ci serve per ragionare su corrente e tensione ai capi di R_5



pW 8

che possiamo anche così suddividere.



Possiamo facilmente ritrovare la condizione vista tante volte e che si dice di equilibrio del ponte.

$$I_5 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_5}$$
$$I_5 = 0 \Rightarrow E_{Th} = 0$$
$$E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_4} - E \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0$$
$$\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0$$
$$R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_4 = 0$$
$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$$