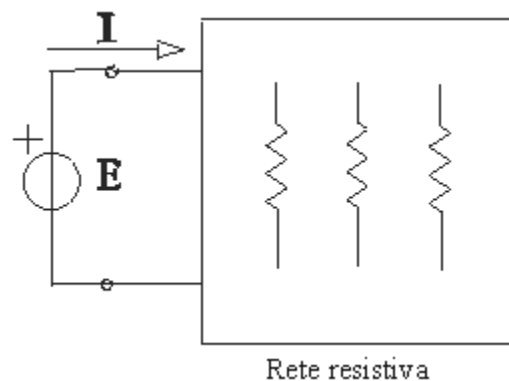


Zeno Martini (admin)

RESISTENZA EQUIVALENTE

1 January 2004

Per determinare la resistenza equivalente di una qualunque rete resistiva vista da due terminali, è sufficiente immaginare di collegare ai due terminali un generatore ideale di tensione, calcolare la corrente da esso erogata e fare il rapporto tra la f.e.m del generatore e l'intensità di corrente calcolata.



Matematicamente ciò equivale a procedere nel seguente modo.

Si immagini di scrivere il sistema di equazioni che risolve la rete ricorrendo al metodo delle correnti di maglia. La maglia con il generatore di tensione sia la n. 1 e sia m il numero delle maglie.

Il sistema, utilizzando la notazione matriciale sarà del tipo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La corrente erogata dalla f.e.m. E è $I = i_1$

Si ha allora

$$i_1 = \frac{E \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}$$

$$R_{eq} = \frac{E}{I} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m2} \end{vmatrix}}$$

Spesso si procede in altro modo, per calcoli e schemi successivi ricorrendo ai concetti di serie e di parallelo.

Più resistenze si dicono in serie quando sono percorse dalla stessa corrente, in parallelo quando sono sottoposte alla medesima tensione.

La resistenza equivalente a n resistenze in serie corrisponde alla somma delle n resistenze mentre la resistenza equivalente di n resistenze in parallelo è l'inverso della somma degli inversi delle n resistenze.

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots R_n$$

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

La tensione applicata alla serie è infatti, per il secondo principio di Kirchhoff, la somma delle tensioni ai capi delle singole resistenze, che per la legge di Ohm sono uguali al prodotto delle resistenze per la corrente comune.

Si ha allora:

$$U = U_1 + U_2 + \dots U_n = I \cdot (R_1 + R_2 + \dots R_n)$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = R_s = R_1 + R_2 + \dots R_n$$

Nel caso del parallelo invece, per il primo principio di Kirchoff la corrente totale è la somma delle correnti sulle singole resistenze le quali, per la legge di Ohm, sono uguali alla tensione comune diviso la resistenza stessa.

Si ha in definitiva:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

Da cui

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Il metodo di calcolo consiste perciò nell'individuare serie e/o paralleli di resistenze, sostituirli con il valore della loro resistenza equivalente e procedere fino ad arrivare ad avere una sola resistenza che è la resistenza equivalente totale.

A volte però ci si imbatte in reti in cui non è possibile individuare né resistenza in serie, né resistenze in parallelo com'è il caso della rete di figura (nota con il nome ponte di Wheatstone)

Si ricorre allora alla trasformazione stella-triangolo.

Stella di resistenze (Y)	Triangolo di resistenze (D)

Una stella è un tripolo costituito da tre resistenze aventi un terminale comune mentre i tre terminali liberi sono collegati a punti di diverso potenziale.

Un triangolo è un tripolo costituito da tre resistenze collegate una di seguito all'altra formando una figura chiusa. I tre punti di connessione delle resistenze sono assimilabili ai vertici di un triangolo e sono collegati a punti di diverso potenziale.

Le equazioni che definiscono la trasformazione si ricavano estendendo il concetto di equivalenza espresso per un bipolo ad un tripolo. Un tripolo è equivalente ad un altro se, considerati due qualsiasi poli dell'uno, la relazione che lega tensione e corrente entrante è la stessa di quella che si ottiene considerando i poli corrispondenti dell'altro tripolo.

Ciò equivale ad impostare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} R_A + R_B = \frac{R_{AB} \cdot (R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \\ R_A + R_C = \frac{R_{AC} \cdot (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \\ R_B + R_C = \frac{R_{BC} \cdot (R_{AB} + R_{AC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \end{cases}$$

che risolto assumendo come incognite R_A , R_B , R_C fornisce la terna di equazioni che definiscono la trasformazione triangolo-stella ($\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Y}$) mentre risolto assumendo come incognite R_{AB} , R_{BC} , R_{AC} si ottiene la terna di equazioni che definiscono la trasformazione stella-triangolo ($\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{D}$).

Si hanno dunque le relazioni:

$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Y}$	$\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{D}$
$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$	$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C}$
$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$	$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A}$
$R_C = \frac{R_{BC} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$	$R_{AC} = R_A + R_C + \frac{R_A \cdot R_C}{R_B}$

Nel caso del ponte di Wheatstone R_1 , R_2 , R_5 costituiscono una stella (come R_3 , R_4 , R_5) mentre R_1 , R_3 , R_5 formano un triangolo (come R_2 , R_4 , R_5). Sostituendo allora o una stella con il triangolo equivalente o un triangolo con la stella equivalente si ottiene un circuito equivalente composto da resistenze in serie ed in parallelo come si evidenzia nelle figure seguenti.

$(R_A=R_1; R_B=R_2; R_C=R_5)$
$(R_{AD}=R_1; R_{DC}=R_5; R_{AC}=R_3)$