



Michele Moroni

LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

15 September 2002

(Basato sulle Lezioni di relatività di Peter Dunsby e di Mauro Carfora)

Consideriamo un diagramma spazio tempo bidimensionale ($x=x(w)$) $w=ct$

Fig 1.1 Esempio di diagramma spazio-tempo

Un punto nel diagramma spazio-tempo, a fissate coordinate (x, w) , è chiamato **evento**. Una particella o un osservatore che si muove nello spazio tempo descrive una traiettoria chiamata **linea d'universo**.

La derivata della linea d'universo di una particella è legata alla sua velocità dalla relazione:

$$(1)$$

Risulta evidente come un raggio di luce ($v=c$) sia una retta inclinata di 45° .

Supponiamo che un osservatore **O** stia utilizzando un sistema di coordinate (x, w) , mentre un altro osservatore **O'** (che in generale utilizza un sistema di coordinate diverso x', w') si muove di moto rettilineo uniforme nel diagramma spazio tempo

dell'osservatore $\mathbf{O}$, descrivendo la linea d'universo disegnata in blu nel diagramma seguente. Risulta evidente che questa linea d'universo rappresenta l'asse w' dell'osservatore $\mathbf{O}'$

Fig 1.2: l'asse ct' di una particella che si muove con velocità v rispetto ad $\mathbf{O}$

Quale sarà la posizione dell'asse x' nel diagramma spazio-tempo di $\mathbf{O}$?

Per rispondere consideriamo prima i seguenti 3 eventi nel diagramma spazio-tempo dell'osservatore $\mathbf{O}'$ (mostrato in figura 1.3), definiti come segue:

Evento A) Un fascio di luce è emesso dal punto A $(0, -a)$

Evento B) Il fascio viene riflesso nel punto $(a, 0)$

Evento C) Il fascio viene ricevuto dall'osservatore nel punto $(0, a)$

Sappiamo già dove si trova l'asse ct' nel diagramma di **O** (vedi figura 1.2). Dato che quest'asse definisce il luogo geometrico $x'=0$ possiamo collocare immediatamente gli eventi A e C [rispettivamente a $w'=-a$ e $w'=a$]. Secondo il postulato fondamentale della teoria della relatività speciale **LA VELOCITA' DELLA LUCE E' COSTANTE IN OGNI SISTEMA DI RIFERIMENTO**; ciò significa che in ogni sistema di riferimento un fascio luminoso è sempre rappresentato da una retta inclinata di 45° . Possiamo quindi immediatamente disegnare nel diagramma di **O** il fascio di luce emesso da A, che si muove lungo una linea d'universo inclinata di 45° (con derivata positiva). Il fascio riflesso deve arrivare all'evento C, quindi sicuramente esiste una retta inclinata di 45° (con derivata negativa) che passa attraverso il punto C. L'intersezione di queste due linee rappresenta l'evento B in **O**. Segue quindi immediatamente che l'asse x' è la retta che connette questo punto e l'origine.

Fig 1.4: Riflessione della luce in $\mathcal{O}'$ vista da $\mathcal{O}$

Osservazione a) la retta x' è simmetrica a w' rispetto alla linea d'universo L di un raggio di luce che attraversa l'origine del sistema (come è facile dimostrare partendo da considerazioni geometriche)

Uno dei risultati più sorprendenti di questa trattazione è che eventi contemporanei in $\mathcal{O}'$ non sono contemporanei in $\mathcal{O}$

Avendo gli assi dei sistemi $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ la stessa origine (risultato ottenuto sincronizzando gli orologi dei due osservatori nel momento in cui passano vicini), la più generale trasformazione che consente di passare dal sistema di riferimento $\mathcal{O}$ al sistema di riferimento $\mathcal{O}'$ è:

$$(2)$$

Dove i coefficienti all'interno della matrice 2×2 dipendono solo dalla velocità v di $\mathcal{O}'$ rispetto ad $\mathcal{O}$

Utilizzando la relazione 1) è immediato osservare che la retta w' (luogo $x'=0$) nel sistema di riferimento $\mathcal{O}$ soddisfa l'equazione

$$(3)$$

Imponendo $x' = 0$ nella (2) si ricava

(4)

Confrontando la (3) con la (4) si ottiene

(5)

tenendo presente l'osservazione (a) risulta invece immediato dimostrare che l'equazione della retta x' (luogo $w'=0$) nel sistema di riferimento $\mathbf{O}$ è:

(6)

Imponendo $w'=0$ nella (2)

(7)

da cui , confrontando la (7) con la (6)

(8)

Sostituendo la (5) e la (8) nella (2) si ottiene:

(9)

Consideriamo ora una linea d'universo di tipo luce. Sapendo che la velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento si deduce che, per questo tipo di traiettoria, devono essere verificate le relazioni

(10)

combinando le relazioni (10) con la (9)

Da cui, sostituendo nella (9)

(11)

Rielaborando la (10) si ricava

che ovviamente può essere riscritta come:

(12)

Osservazione B) La relazione (12) implica che la matrice che connette due vettori (x, iw) e (x', iw') deve avere il determinante di modulo unitario.

Per trovare la matrice di connessione basta effettuare la seguente trasformazione di coordinate sulla (11)

ovvero, semplificando

Il determinante della precedente matrice è:

Tenendo conto dell'osservazione B

La relazione 9), considerando che w, x, w', x' devono essere reali, implica che γ è reale; da cui

Tenendo inoltre in considerazione che per $v=0$ $w=w'$ e $x=x'$ --> è accettabile solo la soluzione positiva

E quindi, le trasformazioni di Lorentz possono essere scritte come

è esattamente la relazione che volevamo trovare, ovvero una relazione che lega due sistemi di coordinate uno in moto rettilineo uniforme rispetto all'altro (TRASFORMAZIONI DI LORENTZ)