



Michele Moroni

L'INTERVALLO SPAZIO-TEMPORALE

23 September 2002

(Basato sulle Lezioni di relatività di Peter Dunsby e di Mauro Carfora)

L'intervallo Spazio-Temporale

Consideriamo un sistema di riferimento $\mathbf{O}$, due eventi $\mathbf{A} [x_a, y_a, z_a, w_a]$ e $\mathbf{B} [x_b, y_b, z_b, w_b]$ e infine la grandezza definita dalla relazione

(1)

è chiamato **INTERVALLO SPAZIOTEMPORALE**

Osservazione (1) L'intervallo spazio-temporale tra due eventi è costante in ogni sistema di riferimento inerziale

Dimostrazione

Consideriamo un sistema di riferimento $\mathbf{O}'$ che si muove con velocità $\mathbf{v}$ rispetto ad $\mathbf{O}$. Non si perde di generalità supponendo che $\mathbf{v}$ sia diretto lungo x nello spazio (x, y, z) di $\mathbf{O}$

In $\mathbf{O}'$ le coordinate degli eventi A e B sono $A=[x'_a, y'_a, z'_a, w'_a]$ $B=[x'_b, y'_b, z'_b, w'_b]$, e l'espressione del

(2)

La trasformazione che lega le coordinate di un evento C nei due sistemi di riferimento è:

(3)

Combinando la (3) e la (2) si ricava...

Sviluppando i quadrati, eliminando i termini comuni e semplificando

Ovvero

da cui confrontando con l'equazione (1)

Spesso l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale è espressa dicendo che questa grandezza è "**Lorentz invariante**"

Se gli eventi A e B sono situati uno molto vicino all'altro (i matematici dicono a "distanza infinitesima") si preferisce parlare di "intervallo spazio temporale elementare e indicarlo come

Lo spazio minkowskiano

Come è già stato dimostrato nel capitolo (1), introducendo la trasformazione di coordinate $(x,y,z,w) \rightarrow (x,y,z,iw)$ è possibile scrivere la trasformazione di Lorentz come:

(2)

con

Osserviamo immediatamente che la grandezza $(v/c)^2$ è sempre compresa tra 0 e 1; e' quindi possibile effettuare la sostituzione

(nota, β è un parametro reale)

Ricordando che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ si dimostra in maniera elementare che la relazione (2) può essere scritta come

Introduciamo dunque la nuova variabile (complessa)
la precedente relazione viene riscritta come

tenendo conto delle definizioni elementari.

si ricava

Osserviamo quindi che la matrice che lega i vettori $[iw', x']$ e $[iw, x]$ è una **matrice di rotazione con angolo complesso**

Risulta quindi comodo introdurre uno spazio vettoriale complesso (**SPAZIO MINKOWSKIANO**) avente vettori di base $[iw_0, x_0]$ e considerare la trasformazione tra i sistemi di riferimento di **O'** e **O** come una rotazione in questo spazio vettoriale (con angolo di rotazione a sua volta complesso)

E' evidente che l'intervallo spazio-temporale nello Spazio Minkowskiano assume la forma

e quindi può essere interpretato come il **modulo quadro** di un vettore.