



Maurizio Monteduro

FILTRI ATTIVI

23 January 2003

- [Premesse](#)
- [Convertitore di immittenza generalizzato \(gic\)](#)
- [Funzioni elementari di secondo grado](#)
- [Filtri attivi del secondo ordine](#)
- [Filtro passa basso, passa banda, passa alto](#)
- [Circuiti a sorgente controllata](#)
- [Filtri a variabile di stato](#)
- [La cella "star"](#)

Premesse

Prima di addentrarci nell'analisi dettagliata dei filtri attivi, giova tentare di dare una definizione al termine *filtro*.

Un filtro è un doppio bipolo che, una volta inserito fra generatore ed utilizzatore, fornisce a quest'ultimo la massima potenza quando la frequenza del segnale applicato all'entrata è compresa fra uno o più intervalli di frequenze, ciascuno dei quali prende il nome di *banda passante*, mentre impedisce la trasmissione del segnale nel campo, o nei campi, di frequenze complementari ai precedenti, ciascuno dei quali prende il nome di *banda attenuata*.

In relazione al comportamento in frequenza presentato dei filtri stessi, è possibile effettuare una prima distinzione: i tipi più diffusi sono i seguenti:

- filtro passa basso [low pass - LP]
- filtro passa banda [band pass - BP]
- filtro passa alto [high pass - HP]
- filtro a reiezione di banda [band rejection - BR]
- filtro passa tutto [all pass - AP].

Il filtro **Passa Basso** presenta la banda passante per frequenze da 0 a f_0 , mentre la banda attenuata va da f_0 all'infinito.

Il filtro **Passa Banda** ha la banda attenuata da 0 a f_1 , passante da f_1 a f_2 ed ancora attenuata da f_2 all'infinito.

Il filtro **Passa Alto** palese la banda attenuata da 0 a f_0 e passante da f_0 all'infinito.

Il filtro a **Reiezione di Banda** o "filtro elimina banda" è il complementare del filtro passa banda, pertanto presenterà la banda passante da 0 a f_1 , attenuata da f_1 a f_2 , ed ancora passante da f_2 all'infinito.

Il filtro **Passa Tutto** ha la proprietà di non variare il modulo della sua funzione di trasferimento al variare della frequenza, ma presenta una rotazione di fase di 360° attorno ad una data frequenza.

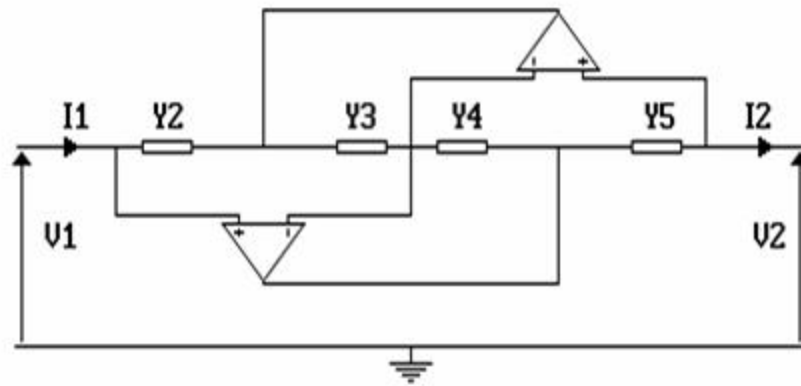
Senza addentrarci minimamente nella complessa teoria che sta alla base della sintesi dei filtri passivi, ci basti pensare che, normalmente, un filtro passivo presenta un numero di induttori circa pari al numero di condensatori che lo compongono. Gli induttori sono i componenti che danno la maggior quantità di problemi sia nella loro costruzione che nel loro utilizzo, infatti sono generalmente ingombranti, costosi, scarsamente integrabili e presentano una buona dose di parametri parassiti che allontanano il funzionamento pratico da quanto ci si attenda dal calcolo teorico del filtro. Si è quindi cercato di orientarsi su celle che utilizzino solo resistori e condensatori, tentando di ovviare all'assenza di induttori con l'uso di componenti attivi, prevalentemente amplificatori operazionali. Simili circuiti vengono generalmente definiti *Circuiti RC Attivi*.

In questo capitolo affronteremo inizialmente il problema della simulazione di induttori, per poi addentrarci nello studio di diverse soluzioni circuitali per la realizzazione dei vari tipi di filtro.

Convertitore di immettenza generalizzato (gic)

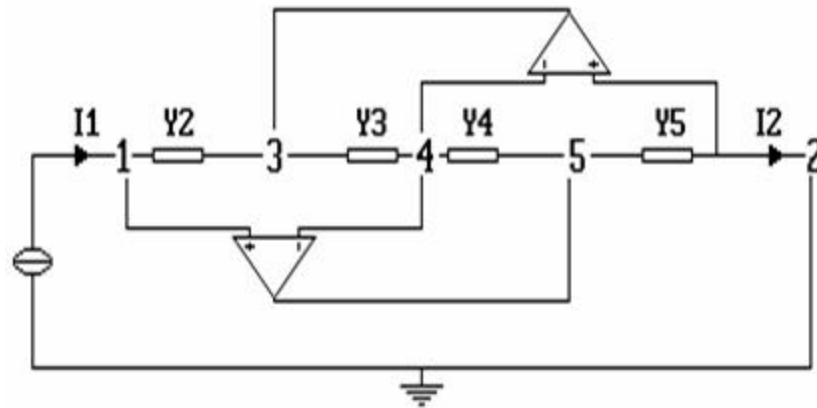
Per il circuito in figura, vogliamo calcolare i parametri di catena A,B,C,D: tali parametri sono i coefficienti delle incognite del sistema:

$$\begin{cases} V_1 = A \cdot V_2 + B \cdot I_2 \\ I_1 = C \cdot V_2 + D \cdot I_2 \end{cases}$$



GIC di Antoniou

Per valutare $A^o V_1/V_2$ con $I_2=0$ basta osservare che, nell'ipotesi di operazionali ideali, non essendoci caduta di tensione fra i morsetti invertente e non invertente, l'ingresso è equipotenziale all'uscita, pertanto $V_1=V_2$ e quindi $A=1$. Per il calcolo relativo a $B^o V_1/I_2$ con $V_2=0$, per lo stesso motivo precedente, anche V_1 sarà nullo, e pertanto $B=0$. Per quanto concernente $C^o I_1/V_2$ con $I_2=0$, ovvero con l'uscita a vuoto, basta notare che, essendo l'operazionale ideale ed essendo nulla la corrente I_2 , sarà nulla anche la corrente che circola in Y_5 . Ciò vuol dire che sarà nulla la caduta di tensione ai capi di Y_5 e non essendoci differenza di potenziale fra i morsetti invertente e non invertente dell'operazionale, non ci sarà caduta di tensione nemmeno su Y_4 , il che si traduce nell'asserzione che anche la corrente che circola in Y_4 dovrà essere nulla. Non entrando corrente negli operazionali ed essendo nulla la corrente in Y_4 , dovrà essere nulla anche la corrente che circola in Y_3 e quindi, su di essa, non ci sarà caduta di tensione. Tenendo presente che essendoci un potenziale nullo fra i due morsetti dell'operazionale, sarà nulla la caduta su Y_2 e quindi sarà nulla anche la corrente che vi circola. Non entrando corrente nel morsetto non invertente dell'operazionale, se ne deduce che anche I_1 sarà nulla, e quindi $C=0$.



Circuito per il calcolo di D

Calcoliamo ora $D^0 I_1/I_2$ valutato con $V_2=0$, ovvero con l'uscita chiusa in corto circuito, così come da figura. Essendo l'uscita chiusa in corto circuito, la tensione ai nodi 1, 2 e 4 sarà nulla, in quanto V_2 è nulla a causa del corto circuito, V_4 è nulla in quanto ai morsetti di ingresso di un operazionale non cade tensione, e V_1 è pari a 0 V per lo stesso motivo. A questo punto non resta che risolvere le equazioni ai nodi 3 e 5, ricordando, come sempre, che essendo gli operazionali ideali, non entra corrente nei loro morsetti di ingresso.

$$\begin{cases} I_1 = -V_3 \cdot Y_2 \\ -V_3 \cdot Y_3 = V_5 \cdot Y_4 \end{cases}$$

[equazioni rispettivamente ai nodi 3 e 5]

Inoltre

$$I_2 = V_5 Y_5$$

Risolvendo il sistema, otteniamo

$$V_3 = -\frac{I_1}{Y_2} \quad \text{e} \quad V_5 = \frac{I_1 Y_3}{Y_2 Y_4}$$

da cui, sostituendo,

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4}$$

e quindi

$$D = \frac{Y_2 Y_4}{Y_3 Y_5}.$$

Quindi il sistema risulta essere:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ I_1 = \frac{Y_2 Y_4}{Y_3 Y_5} \cdot I_2 \end{cases}$$

Se ora carichiamo l'uscita con un'impedenza Z_L , osservando che vale la relazione

$$Z_L = \frac{V_2}{I_2}$$

ovvero

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L}$$

calcoliamoci l'impedenza di ingresso Z_{ing} che si vede guardando fra il morsetto 1 e la massa; essa sarà pari a

$$Z_{ing} = \frac{V_1}{I_1}$$

, cioè:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{A \cdot V_2 + B \cdot \frac{V_2}{Z_L}}{C \cdot V_2 + D \cdot \frac{V_2}{Z_L}}$$

Semplificando V_2 e facendo il m.c.m. potremo scrivere che:

$$Z_{ing} = \frac{A \cdot Z_L + B}{C \cdot Z_L + D}$$

Sostituendo i nostri parametri di catena, potremo scrivere che nel caso in analisi, l'impedenza di ingresso Z_{ing} vale:

$$Z_{ing} = \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} \cdot Z_L$$

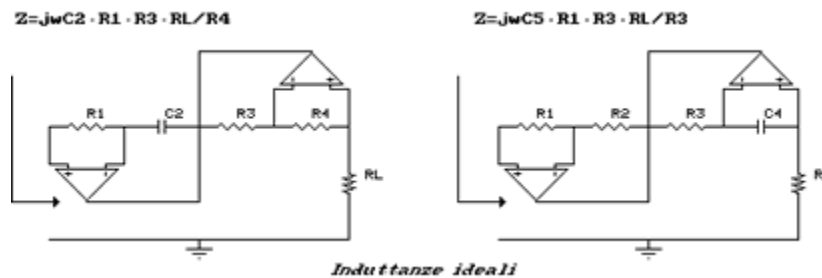
Resta evidente, a questo punto, che se al posto di Y_3 mettessimo un condensatore di capacità C_3 e al posto delle restanti ammettenze Y_i mettessimo altrettante resistenze di valore R_i , la Z_{ing} diventerebbe:

$$Z_{ing} = j\omega \cdot \frac{C_3 R_2 R_4 R_L}{R_5}$$

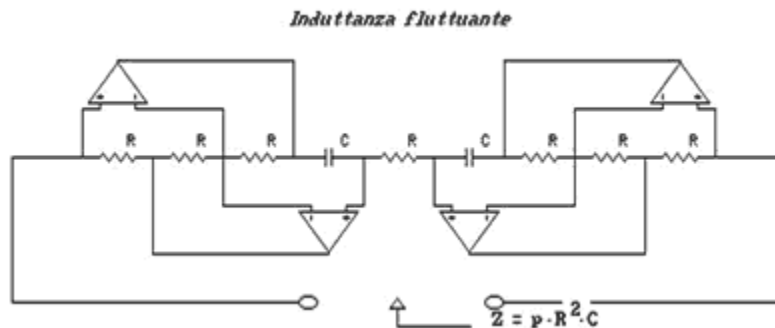
che ha le dimensioni, come si può ben notare, di un'impedenza con un capo a massa. Lo stesso ragionamento vale se sostituissimo Y_5 con una capacità di valore C_5 e, come prima, tutte le altre ammettenze con delle resistenze. In questo caso otterremmo:

$$Z_{ing} = j\omega \cdot \frac{C_5 R_2 R_4 R_6}{R_5}$$

I circuiti relativi sono riportati in figura.



Con questo tipo di circuito, siamo quindi in grado di simulare induttanze ideali con un capo a massa. È facile dimostrare, e lo lasciamo all'attento lettore, che per realizzare induttanze fluttuanti, cioè sospese, ovvero senza capi a massa, sarà necessaria la connessione di due induttanze ideali come indicato nella figura che segue.

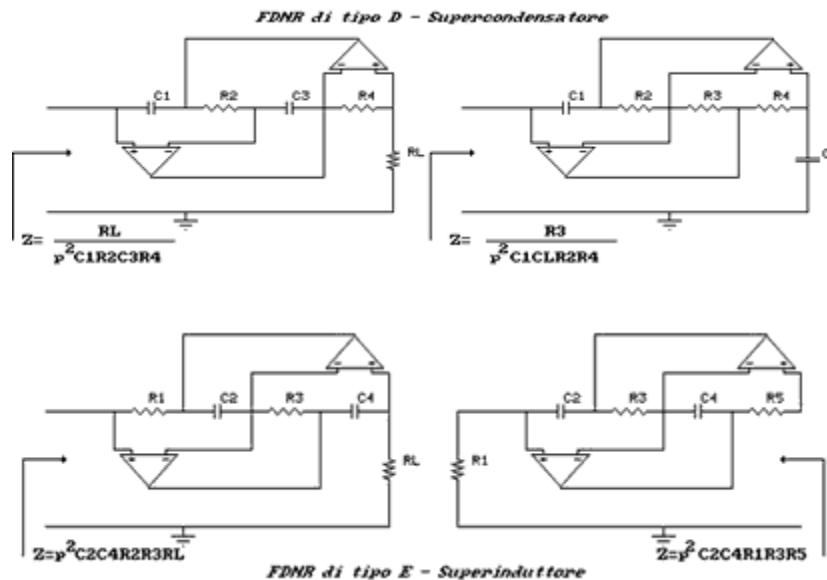


È possibile, con giuste sostituzioni, realizzare, a questo punto, circuiti che abbiano impedenza di ingresso proporzionale a p^2 . Ricordando che $p \equiv j\omega$ e che quindi $p^2 = -\omega^2$, potremo avere dispositivi con impedenza puramente reale e proporzionale a $-\omega^2$. Se l'impedenza è puramente reale, allora presenterà un comportamento resistivo negativo. Questi circuiti sono stati, da Bruton, denominati "FDNR", acronimo di Frequency Dependent Negative Resistance, ovvero di resistenze negative dipendenti dalla frequenza. Si ottengono così FDNR detti di tipo D o di tipo E a seconda che siano proporzionali rispettivamente a $1/p^2$ o a p^2 . Nel primo caso otterremo dei "Supercondensatori", mentre nel secondo caso avremo dei "Superinduttori". È banale, sostituendo nell'equazione già calcolata

$$Z_{in} = \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} \cdot Z_L$$

al posto delle ammettenze indicizzate le reali ammettenze dei componenti circuitali, dimostrare che, nei supercondensatori, $Y(p)$ sarà proporzionale a p^2 e, nei superinduttori, sarà $Z(p)$ ad essere proporzionale a p^2 . La costante di proporzionalità sarà un numero sempre positivo che prende il nome di "D" nel caso dei supercondensatori e di "E" nell'altro caso. D ha le dimensioni di Farad per Secondo, mentre E si misura in Henry per Secondo, come per altro, è facile dimostrare.

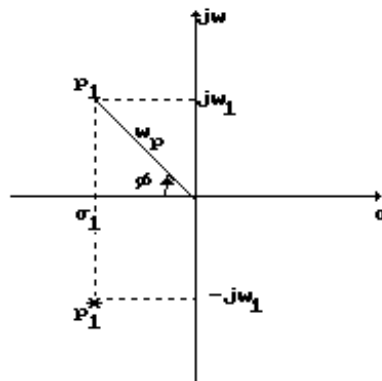
I circuiti che si ottengono sono rappresentati nelle figure seguenti:



Entriamo ora nell'analisi più dettagliata dei filtri attivi. In questo capitolo, ci soffermeremo soprattutto sui filtri del secondo ordine, ovvero su filtri che hanno a denominatore un polinomio di secondo grado nella forma:

$$p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2,$$

in cui ω_p^2 è il *modulo dei poli complessi*, mentre q_p è il *fattore di qualità del filtro*, pari all'inverso del *fattore di smorzamento* d . Vale la pena di puntualizzare brevemente il significato fisico di w e di q . Risolvendo l'equazione sopra riportata, risulterà evidente la comparsa di una coppia di poli, non necessariamente puramente reali, ma complessi coniugati. La distribuzione dei poli sul piano gaussiano sarà quindi, genericamente, quella riportata in figura:



Sia quindi $p_1 \equiv \sigma_1 + j\omega_1$ e $p_1^* \equiv \sigma_1 - j\omega_1$ con σ_1 reale e ω_1 reale e positivo. A questo punto, q_p e ω_p sono così definiti:

$$q_p \equiv -\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}}{2\sigma_1} \quad \text{e}$$

$$\omega_p \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}$$

da cui è facile dedurre che

$$q_p = -\frac{\omega_p}{2\sigma_1}$$

È evidente osservare che ω_p è il modulo dei poli complessi, mentre q_p risulta essere pari a

$$q_p = -\frac{1}{2\cos\varphi}.$$

Si può, così, notare come il q cresca da 0.5, quando le radici sono reali, fino a tendere a ∞ se le radici sono puramente immaginarie.

Il polinomio di secondo grado che genera una simile coppia di poli sarà:

$$p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2$$

ed il generico polinomio non monico di secondo grado

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

avrà

$$q_p = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_1} \quad \text{ed} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

Volendo chiamare s_1 e s_2 le radici reali negative del trinomio monico, lo stesso acquisterà la forma di

$$p^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)p + \sigma_1 \sigma_2$$

In questo caso

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

ed

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$$