



Zeno Martini (admin)

Alternata e numeri complessi

3 November 2003

Domanda:

In un circuito in alternata sinusoidale, posso determinare istante dopo istante, il valore della tensione e della corrente $v(t)$ e $i(t)$. La relazione che determina questo è: $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$; essa sfrutta i Teoremi sui triangoli rettangoli[.] C'è una dimostrazione che mi faccia capire quali sono i passaggi per trasportare il vettore rotante nel piano di Gauss? Il mio testo scolastico fa riferimento solo come cenno storico ad una legge.... di STEINMETZ- KENNELLY (Arthur Edwin Kennelly, ingegnere americano 1861 1939). La mia prof. di elettrotecnica mi ha detto che risulta essere molto complicato fare calcoli nel dominio del tempo, occorre dunque passare al piano complesso.

Risponde admin

Le tue considerazioni sono un po' confuse e mescolano molti argomenti in modo affrettato. Forse speri esista una ricetta miracolosa e rapida che faccia subito capire, mentre nello studio occorre avere pazienza ed essere disposti a faticare un po' per assimilare i concetti importanti.

Cercherò di esporti i problemi che stai affrontando.

Farò del mio meglio: spero di non confonderti ulteriormente le idee.

Devi però leggere attentamente, con calma, e riflettere, anche se io ho scritto un po' velocemente.

Dunque: $u(t)$ è il valore istantaneo, ad esempio di una tensione, che varia nel tempo con una legge detta sinusoidale, perché nella sua espressione compare la funzione matematica seno, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \phi)$. Il seno è una funzione d'angolo definita come rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato. Per questo tu dici, ma è non è proprio un linguaggio appropriato, "sfrutta i teoremi sui triangoli rettangoli".

$u(t)$ rappresenta anche la proiezione, sull'asse delle ordinate di un piano cartesiano, di un vettore di ampiezza U_m che forma un angolo $\alpha = \omega t + \phi$ con l'asse delle ascisse. L'angolo α varia nel tempo perché ω rappresenta la velocità angolare costante con cui il vettore

ruota nel piano in senso antiorario, quindi anche la sua proiezione, che assume i valori istantanei della tensione presa in esame. Una funzione sinusoidale può dunque essere messa in corrispondenza biunivoca con un vettore rotante. Due tensioni sinusoidali, relative ad esempio a due bipoli in serie, aventi la stessa frequenza f , quindi della stessa pulsazione $\omega = 2\pi f$, sono rappresentate da due vettori che, ruotando alla stessa velocità, mantengono inalterata la loro posizione reciproca. Essi differiscono unicamente per l'ampiezza U_m e per l'angolo ϕ , detto angolo di fase o, semplicemente, fase. La somma delle due tensioni istantanee è la somma delle singole proiezioni dei vettori e coincide con la proiezione della somma vettoriale dei due vettori. Steinmetz, notando questo, ed accorgendosi che sommare due sinusoidi nella forma matematica originaria (o analitica, era molto più complicato che effettuare la somma di vettori, decise di effettuare somme e differenze di sinusoidi ricorrendo ai vettori. Poiché in ogni istante la posizione reciproca tra i vettori non muta, è sufficiente rappresentarli in un istante qualsiasi, ed il più comodo è l'istante $t = 0$ quando $\omega t + \phi = \phi$. L'ampiezza del vettore somma è l'ampiezza della sinusoide mentre la fase è l'angolo che il vettore somma forma con l'asse delle ascisse. E' indispensabile, per questi calcoli, come avrai capito, che le grandezze sinusoidali siano della stessa frequenza. Steinmetz ha, come si dice, trasformato il problema, spostandolo dal dominio del tempo, le espressioni analitiche come $U_m \sin(\omega t + \phi)$, al dominio della frequenza, cioè nel campo in cui, avendo le grandezze tutte la stessa frequenza, questa può essere ignorata nelle operazioni di somma e differenza. Ciò che contano sono dunque, nel dominio della frequenza, solo l'ampiezza U_m e la fase ϕ . Se poi, come è successo a Steinmetz, ci si accorge che U_m e ϕ individuano un punto del piano, che un punto del piano corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali, e che per le coppie di numeri reali c'è una matematica apposita, quella che tratta i numeri complessi, il corpo numerico più completo, quello, per capirci a cui non sfugge alcun risultato di qualsiasi operazione matematica che uno possa inventare, si può capire come mai si useranno infine i numeri complessi. Poiché, infine, chi più di tutti ha studiato le proprietà dei numeri complessi, cioè dei punti del piano cartesiano, è stato il principe dei matematici Carl Friedrich Gauss, il piano cartesiano i cui punti sono considerati numeri complessi è detto piano di Gauss. Per tutti questi motivi la tua professoressa di elettrotecnica ti ha detto che è "molto complicato fare calcoli nel dominio del tempo, occorre dunque passare al piano complesso".

Sempre con un po' di pazienza puoi trovare ulteriori considerazioni nel sito [\[1\]](#) [\[2\]](#) [\[3\]](#)

Zeno Martini>