



Volfango Furgani

FORMULE E DECIBEL

24 September 2002

global \$id,\$section; ?>

Formule e decibel:

- **Analisi di Fourier**
- **Definizione a parole**
- **Rappresentazione grafica di un segnale mediante gli spettri di ampiezza e di fase**
- **Distorsioni**
- **Unità logaritmiche. I decibel o db.**
- **Risposta in frequenza di un amplificatore in scala logaritmica**
- **Definizione di Common Mode Rejection Ratio (Rapporto di reiezione in modo comune) o CMRR**

Analisi di Fourier

(Dom. 20) Perché si parla sempre di segnali sinusoidali? L'interrogativo non vi angoschia. Comunque un segnale sinusoidale nella gamma dell'udibile è un fischio più o meno alto. Non è granchè. Inoltre non siamo l'Enel. Se vogliamo ascoltare una canzone o la voce della ragazza, abbiamo a che fare con segnali di forma molto più irregolare e complessa. Bene, il buon Fourier, oltre a risolvere il problema della cantina, ci dice che qualunque (quasi) segnale può essere considerato come la somma di molte sinusoidi (in realtà si esagera: infinite) opportunamente scelte come ampiezza, frequenza e fase. Diciamo subito che ogni sinusoide viene chiamata armonica e più armoniche sommiamo, più la loro somma si avvicina in ogni proprietà al segnale iniziale. Questo fatto è molto comodo quando trattiamo con circuiti lineari, cioè quelli per cui vale la sovrapposizione degli effetti e la rappresentazione cartesiana della grandezze di ingresso e uscita è una retta. Gli amplificatori rientrano in questa categoria e possiamo analizzare, anziché l'intero segnale complesso, una sola sinusoide. Sapendo come viene trattata questa sinusoide (ad esempio moltiplicata per 10 in ampiezza), sappiamo che sorte subiscono le altre (moltiplicazione per 10). Quindi l'amplificatore guadagna 10 qualunque forma abbia il segnale. Con una ovvia limitazione: che la frequenza dell'armonica sia compresa fra f_i ed f_s . L'argomento mi pare di tale importanza che dobbiamo precisare meglio. Innanzi tutto noi parliamo di dominio del tempo se t è la variabile indipendente in ascisse. Se c'è f , siamo nel dominio della frequenza.

Definizione a parole

Un qualunque (quasi: comunque tutti quelli che interessano le applicazioni) segnale periodico può essere scomposto nella somma di un termine costante pari al valore medio del nostro segnale e di infinite sinusoidi dette armoniche. La prima armonica ha la stessa frequenza del segnale fondamentale e le successive hanno frequenza multipla secondo n (n è un intero positivo che va da due ad infinito) di quella fondamentale. N viene detto ordine del problema. Fourier insegna a calcolare ampiezza e fase di queste sinusoidi. I matematici l'hanno già fatto per noi ed il Signore renda loro merito. Importante: l'ampiezza delle armoniche decresce con l'ordine. Ad esempio, per l'onda quadra e triangolare, decresce in modo inversamente proporzionale ad n . Se n è pari, l'armonica si dice pari. Se n è dispari, pensate un po' l'arguzia, l'armonica è dispari.

In formula:

(Dom. 21) $V(t) = V_0 + V_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + V_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + V_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + V_n \sin(n\omega t + \varphi_n) + \dots$

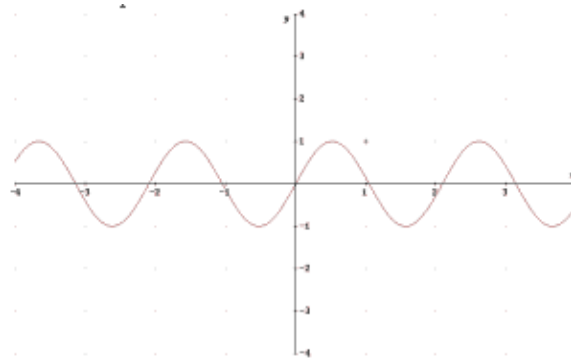
E in notazione più compatta usando il simbolo di sommatoria:

$V(t) = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$. Questa espressione si chiama sviluppo in serie secondo Fourier del nostro segnale.

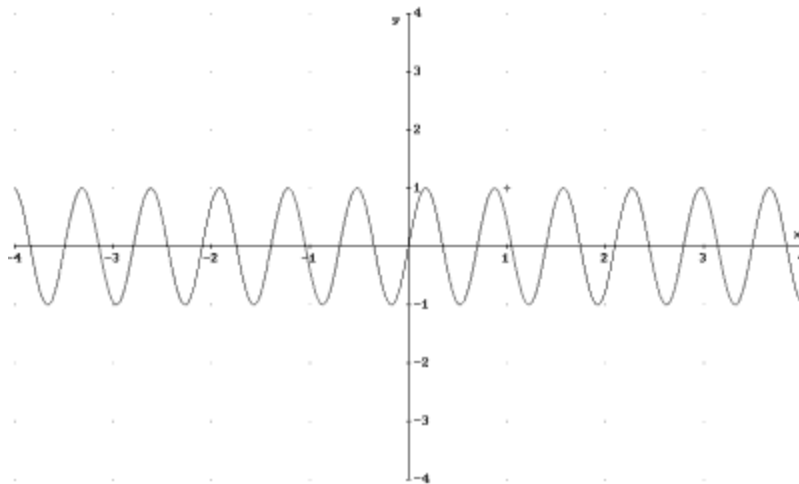
Esistono alcune altre formulazioni matematiche. Io ne ho scelta una.

(Dom. 22) Esempi intuitivi: onda quadra e triangolare.

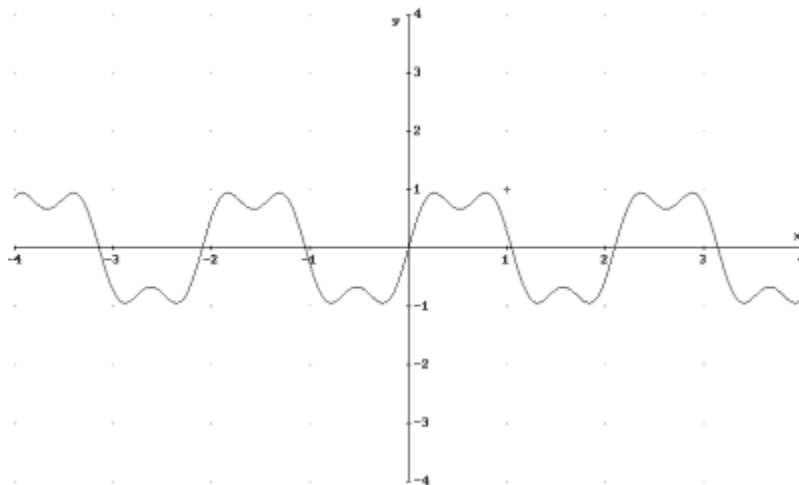
Disegno una prima armonica di frequenza pari a quella dell'onda quadra



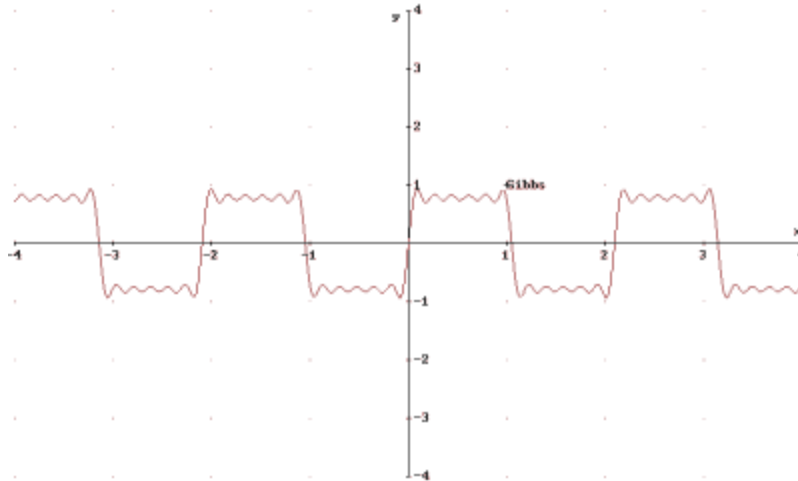
Questa sotto è una terza armonica. Notate che ho saltato la seconda e così farò per tutte le armoniche pari.



Già sommando due armoniche sole si ottiene un andamento che ricorda l'onda quadra:

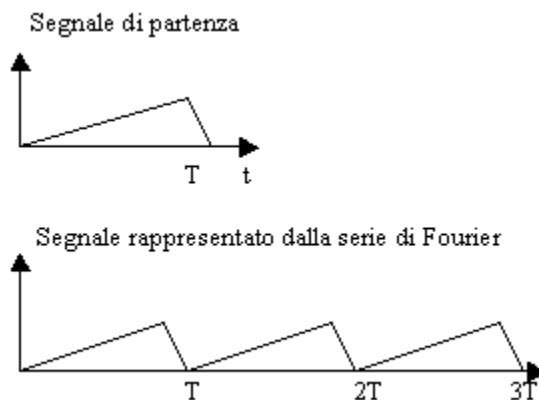


Se aggiungo altre armoniche la somiglianza migliora, ma l'onda quadra mette le corna. Fenomeno generale che accade, anche in una coppia, in presenza di una discontinuità. Prende il nome da Gibbs.



Abbiamo detto segnale periodico (rileggere la definizione non costituisce atto contrario alla pubblica decenza).

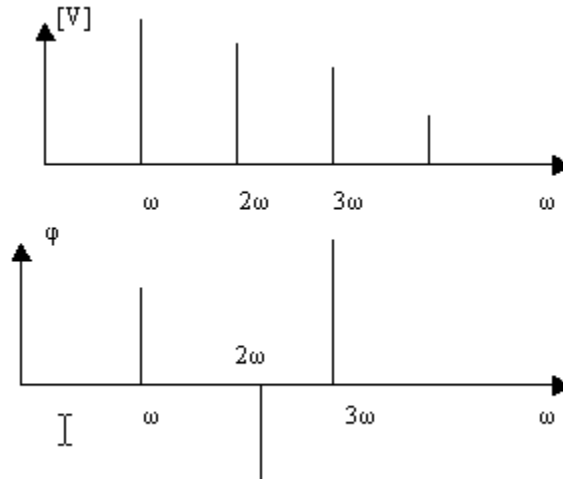
Ora parlare di segnale periodico sembra molto limitativo. Se dico: pirla pirla pirla pirla, voi vi siete già incazzati la prima volta. Le altre non servono (se non come mio sfogo) Nella realtà noi non abbiamo a che fare con segnali periodici. Il telegiornale lo leggono una volta sola. Bene la serie di Fourier del telegiornale continua a ripeterlo anche quando a noi non interessa più. Possiamo spegnere la TV. In altri termini il segnale triangolare diviene una successione di triangoli e l'informazione non va persa.



Se vi pare grave, la matematica insegna a sviluppare secondo Fourier anche segnali non periodici. Basta sostituire al segno Σ il simbolo di integrale $\int$ facendo tendere il periodo all'infinito. Adesso non lo sapete fare. In quinta, quando vi tocca, neanche. Così va il mondo all'Itis.

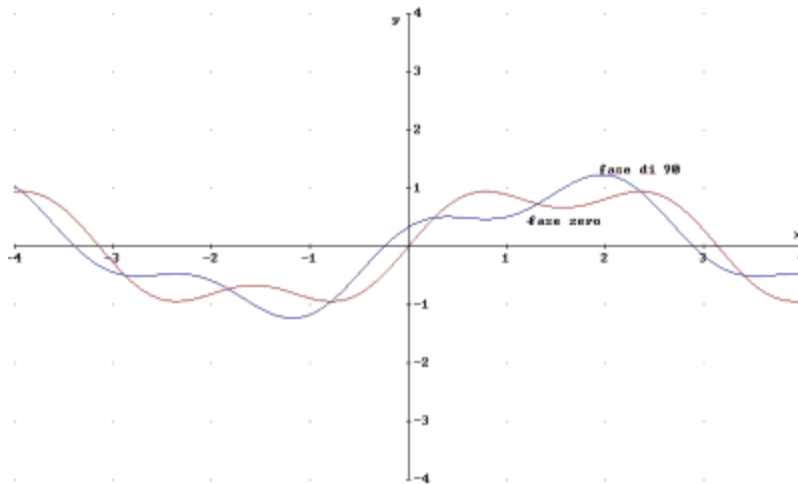
Rappresentazione grafica di un segnale mediante gli spettri di ampiezza e di fase

Sempre ([Dom. 22](#)) Secondo la formula di Fourier un segnale è noto quando sono conosciuti i valori di ampiezza e di fase di ogni singola armonica. Si possono quindi realizzare due grafici, detti spettri, uno per l'ampiezza ed uno per la fase dei tutti equivalenti alle rappresentazioni analitiche.

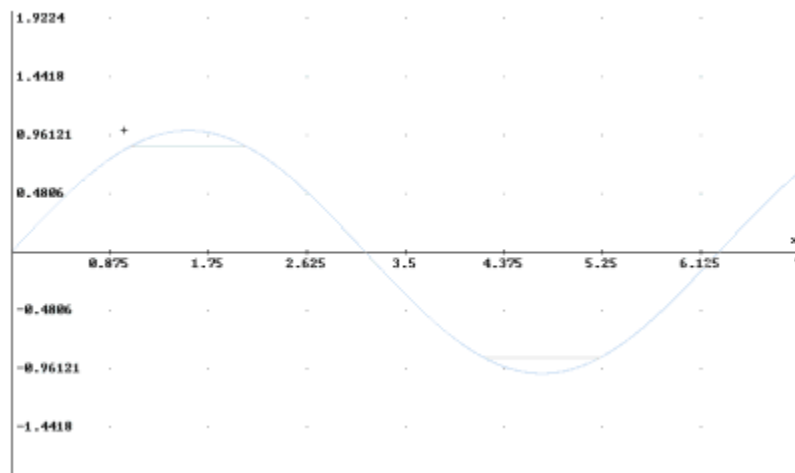


Distorsioni

([Dom. 23](#)) Il mondo non è perfetto (mi ripeto, ma ho avuto a 58 anni qualche occasione di verifica) anche se gli ottimisti (Leibniz) dicono che è il migliore possibile. Quando un segnale viene amplificato non viene riprodotto in maniera esattamente identica perché subisce un numero notevole di distorsioni. Una, quella di frequenza, dipende dal fatto che essendo le armoniche infinite ed fs finita, alcune armoniche, sia pure di ampiezza irrilevante vengono ignorate. Altre, quelle comprese nella banda passante, vengono amplificate ma con guadagni diversi fino al 30%. Infatti se il guadagno, ad una certa frequenza, è minore del 100% ma maggiore del 70% viene convenzionalmente accettato. Di fatto ogni armonica rischia di venire amplificata con un guadagno diverso e il segnale ottenuto in sommando le armoniche amplificate è diverso (speriamo di poco, se no non lo riconosce neanche mamma sua) da quello di ingresso. Il rimedio possibile consiste nel disporre di un amplificatore a banda larga in modo che tutte le armoniche significative vengano amplificate pressappoco con lo stesso guadagno. I guai non finiscono qui, perché le armoniche impiegano tempi diversi ad attraversare l'amplificatore ed arrivare in uscita. La loro somma viene eseguita di mano a mano che arrivano (dialetto purissimo) e differisce dal segnale di ingresso per la distorsione di fase. Nel disegno sotto sono rappresentate la somma di due armoniche in fase e di due sfasate di 90°. Sono chiaramente diverse.



Per fortuna l'orecchio non se ne accorge (lettore di cd), l'occhio (TV) sì. Rimedio. Il problema sta nel fatto che i tempi di ritardo (attraversamento) di ogni armonica sono diversi alle diverse frequenze. Se rendiamo tale tempo costante il segnale arriva un attimino più tardi non distorto. Come facciamo? Ricordiamo che esiste la ben nota relazione $\varphi = \omega t$. Rendendo φ proporzionale ad ω ($\varphi = k\omega$), siamo a cavallo. Infatti t risulta uguale a φ / ω , cioè $k\omega / \omega = k$ che è costante come vogliamo. Come siamo bravi! Le due condizioni A_v costante e $\varphi = k\omega$ si chiamano condizioni di non distorsione secondo Heaviside. Ricordiamo che esistono altri tipi di distorsioni non dipendenti dal contenuto armonico. (Dom. 24) La distorsione di ampiezza ci perseguita quando la linea che rappresenta nel piano cartesiano il legame fra ingresso ed uscita (caratteristica di trasferimento) non è esattamente una retta



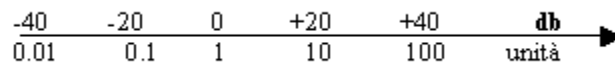
Il rimedio consiste nella famosa reazione negativa: si prende una parte (che so, l'1%) del segnale di uscita distorto e lo si sottrae a quello di ingresso. Così si sottrae anche l'uscita. Parliamo un poco della distorsione di intermodulazione. Se il segnale

che attraversa il quadripolo (aggeggio qualunque con due morsetti di ingresso e due di uscita) non lineare è composto in ingresso di almeno due armoniche, in uscita compaiono armoniche non solo per frequenze multiple (secondo Fourier), ma anche per frequenze somma o differenza (meglio combinazione lineare) di quelle di ingresso. Tali armoniche non vengono prodotte da un quadripolo lineare. Guardate che in elettronica nessun quadripolo è esattamente lineare. Il trucco sta nel trattare segnali abbastanza piccoli. Rimedio. Se prendete un pezzo sufficientemente piccolo di una caratteristica di trasferimento che non sia rettilinea, non si discosta di molto da un segmento di retta.

Unità logaritmiche. I decibel o db

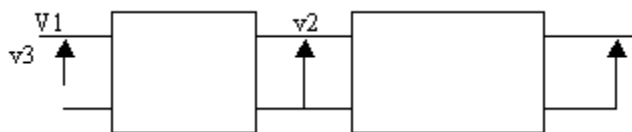
Le ascisse

(Dom. 25) La scala logaritmica per le ascisse (ω) implica che nell'origine ci sia il valore 1, che 0 sia all'infinito negativo per le ben note proprietà dei logaritmi. La scala logaritmica espande i numeri < 1 , ma, e fa molto comodo, comprime i numeri > 1 . Ad esempio, poiché $\log_{10} 1000 = 3$, lo spazio occupato in un disegno è di 3 divisioni, anziché di 1000. Se definiamo come decibel partendo da un numero puro N il logaritmo di N moltiplicato per 20 otteniamo la corrispondenza sotto rappresentata



Le ordinate

Queste nuove unità logaritmiche sono comode perché convertono il prodotto dei guadagni di due o più amplificatori fra loro collegati in una somma di unità logaritmiche. Per esempio disegniamo due amplificatori in cascata. Se v_1 vale 0.1 volt ed il primo guadagno è 10, l'uscita intermedia v_2 varrà un volt. E se il secondo amplificatore guadagna 2 l'uscita v_3 vale 2 volt. Semplice: $A_{vt} = A_{v1} A_{v2}$ e quindi $v_3 = 0.1 \cdot 10 \cdot 2 = 2$ V.

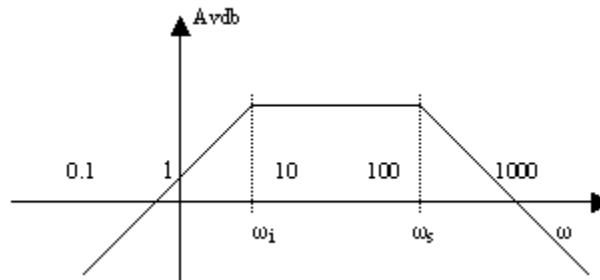


Parentesi. Ogni problema ha una soluzione semplice e sbagliata. Il risultato calcolato con la formuletta del prodotto vale nell'ipotesi che tutti i generatori veri o presunti siano ideali con resistenza interna nulla. Se ciò non è voi sapete che ogni generatore attenua per la caduta su R_s e tale attenuazione va calcolata. Chiusa la parentesi e tirem innanz.

La definizione di db (riferita al guadagno è: $A_{vdb} = 20 \log_{10} A_v$. Secondo questa definizione se $A_v = 10$, $A_{vdb} = 20$ db. Un guadagno di 100 vale 40 db ed uno di 1000 vale 60 db e così via. Un guadagno di 20 (doppio di 10) vale 26 db. Cioè il raddoppio di un numero comporta l'aumento di 6 del numero dei db. Ovviamente questa definizione si applica, volendo, a tutti i numeri puri che spesso derivano dal rapporto di due grandezze omogenee (due tensioni, due correnti) e non solo al guadagno.

Risposta in frequenza di un amplificatore in scala logaritmica

(Dom. 26) Nel disegno seguente la pendenza fuori banda è di -20 db/decade. Il guadagno alle frequenze di taglio è inferiore di 3 db rispetto al massimo



Definizione di Common Mode Rejection Ratio (Rapporto di reiezione in modo comune) o CMRR

(Dom. 27) Solo metà qui. Un amplificatore differenziale risponde all'equazione $v_{out} = A_d(v_2 - v_1)$ nell'ipotesi di perfetta simmetria di tutti i componenti del circuito, integrato o discreto indifferentemente, rispetto all'asse mediano. A_d si chiama guadagno in modo differenziale. Se la perfetta simmetria non viene rispettata si può dimostrare che l'amplificatore in esame non amplifica solo la differenza dei due segnali di ingresso, ma anche il loro valore medio. L'equazione diviene $v_{out} = A_d(v_2 - v_1) + A_s(v_2 + v_1) / 2$. A_s si chiama guadagno in modo comune. Per avere un buon differenziale si cerca di avere $A_d \gg A_s$. Il loro rapporto si indica con CMMR e d è un numero puro sperabilmente molto grande che si può esprimere in db. : $CMRR = A_d / A_s$. In db: $CMRR_{db} = 20 \log_{10} CMRR$.