



Zeno Martini (admin)

TRANSITORI DI CARICA

10 September 2004

Domanda:

Un condensatore è caricato in modo che la sua energia elettrostatica valga E . Un secondo condensatore, identico ed inizialmente scarico, è connesso in parallelo al primo. Quanto varrà l'energia elettrostatica totale dei due condensatori quando sia stato raggiunto l'equilibrio? Le tesi sono due: si dimezza, l'una; rimane la stessa, l'altra. Qual è quella corretta?

Risponde admin

L'evoluzione spontanea di ogni sistema fisico che non riceve energia dall'esterno, è sempre nel senso di una diminuzione dell'energia posseduta. La seconda tesi dunque non può essere corretta. La prima invece è quella da scegliere: si tratta solo di controllare se effettivamente l'energia dimezza. Ci si può arrivare intuitivamente, magari pensando all'analogia esistente con i vasi comunicanti. La tensione finale sui due condensatori sarà la metà, come l'altezza del liquido di due recipienti uguali messi in comunicazione diventa la metà del liquido presente inizialmente in uno solo dei due. La tensione è, per definizione, l'energia per unità di carica e, poiché la carica in gioco è sempre la stessa, come sempre la stessa è la quantità di liquido nei due recipienti, l'energia totale a travaso avvenuto sarà la metà, poiché, l'energia è carica per tensione.

Ma vediamo le considerazioni ed i passaggi matematici che eliminano ogni discussione.

Il condensatore di capacità C_1 sarà carico alla tensione U_1 che determina l'energia $E = 0,5 * C_1 * U_1^2$. La sua carica è $Q_{iniziale} = C_1 * U_1$. Ponendo in parallelo al primo condensatore un secondo condensatore di capacità C_2 inizialmente scarico, quest'ultimo si carica mentre il condensatore originario si scarica parzialmente. L'equilibrio è raggiunto ad una tensione che vale $U_f = U_1 * C_1 / (C_1 + C_2)$: la carica complessiva sui due condensatori rimane infatti uguale alla carica presente sul primo, per cui $Q_{iniziale} = C_1 * U_1 = Q_1 + Q_2 = C_1 * U_f + C_2 * U_f$ da cui la precedente formula. Ora l'energia immagazzinata sui due condensatori in parallelo vale $E_f = 0,5 * (C_1 + C_2) * U_f^2$. Confrontiamo l'energia iniziale E con l'energia finale E_f facendone il rapporto:

$$\begin{aligned} E/E_f = & 0,5 \cdot C_1 \cdot U_1^2 / (0,5 \cdot (C_1 + C_2) \cdot U_f^2) & (C_1 / (C_1 + C_2)) \cdot (U_1 / U_f)^2 = \\ & (C_1 / (C_1 + C_2)) \cdot (C_1 + C_2)^2 / C_1^2 = (C_1 + C_2) / C_1 = \mathbf{1 + C_2 / C_1}. \end{aligned}$$

L'energia iniziale E è dunque maggiore dell'energia finale E_f . Perché poi si dimezzi proprio occorre che il rapporto sia 2 quindi che sia $C_2 = C_1$: i due condensatori devono essere identici, proprio come specificato nel quesito.

La differenza $E - E_f = E \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$ dov'è finita? E' uscita dal sistema dei due condensatori. Dissipata in calore per lo più durante lo spostamento attraverso la resistenza del collegamento ed anche sotto forma di radiazione elettromagnetica in presenza di oscillazioni dovute all'induttanza del collegamento. Immaginiamo un collegamento puramente resistivo con resistenza finita, R . La corrente transitoria ha l'espressione del tipo $i(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$ con $I_0 = U_1/R$ e τ , costante di tempo del circuito in cui, rispetto al flusso di corrente che percorre la R , le due capacità sono in serie; quindi $\tau = R \cdot C_{eq}$ con $C_{eq} = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$. Eseguendo l'integrale della potenza istantanea $p(t) = R \cdot i^2(t)$ per il tempo necessario al raggiungimento della situazione finale, quindi da 0 ad infinito, si ottiene che l'energia dissipata sulla resistenza vale $W = R \cdot I_0^2 \cdot \tau / 2$. Sostituendo in essa i valori di I_0 e τ si ottiene $W = 0,5 \cdot C_1 \cdot U_1^2 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$, cioè proprio la differenza tra E ed E_f .