



Zeno Martini (admin)

APPROCCIO ELEMENTARE

1 January 2002

ELEMENTI DI BASE

Un *vettore* è un'entità matematica caratterizzata da un modulo, una direzione ed un verso. Esso viene rappresentato da un segmento orientato. La lunghezza del segmento corrisponde al modulo del vettore, la freccia al verso, la retta cui il segmento appartiene alla direzione.

Si denomina *campo vettoriale* una porzione di spazio in cui ad ogni punto è associato un vettore.

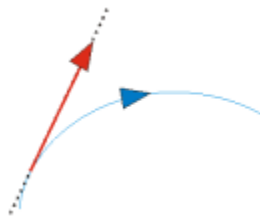
Quando in ogni punto il vettore è lo stesso, il campo si dice *uniforme*.

Nello studio dei campi vettoriali sono importanti i concetti di:

1. **linea di forza**
2. **integrale di linea**
3. **flusso di un vettore**

Linea di forza

è la linea tangente in ogni punto al segmento che rappresenta il vettore in quel punto.



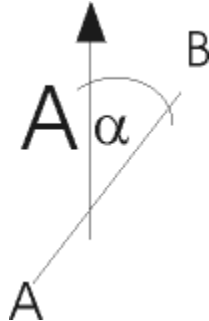
- Verso della linea di forza è quello concorde con il verso del vettore.
- Per ogni punto passa una sola linea di forza, quindi esse non si intersecano mai.
- Le linee di forza possono essere aperte o chiuse.
- Le linee di forza sono usate per rappresentare visivamente il campo.

Nella rappresentazione grafica si conviene di tracciare per ogni unità di superficie un numero di linee proporzionale all'intensità media del vettore. Dove le linee di forza

sono parallele ed equidistanti il campo è uniforme. Il campo è più intenso dove le linee di forza sono più dense. In un campo radiale le linee di forza partono da un centro per cui l'intensità del campo aumenta avvicinandosi al centro (la sorgente delle linee).

Integrale di linea

E' un calcolo che definiamo dapprima nel caso di un campo uniforme.



Si consideri un segmento che unisce due punti qualsiasi A, B dello spazio e lo si orienti da A verso B. Sia α l'angolo che questo segmento orientato forma con la direzione ed il verso del vettore del campo uniforme. Integrale di linea è il prodotto dell'intensità del vettore per la lunghezza del segmento l_{AB} e per il coseno di α :

$$U_{AB} = A \cdot l_{AB} \cdot \cos \alpha$$

Se il campo non è uniforme ed il percorso che unisce i due punti non è un segmento di retta, si può immaginare di dividere la linea in n parti, ciascuna assimilabile ad un segmento di retta, per i punti della quale il vettore caratteristico del campo possa essere considerato una costante. Per ognuno dei segmenti l_i così definiti si può effettuare il calcolo precedentemente illustrato. Sommando gli n prodotti parziali si ottiene l'integrale di linea il cui valore è analiticamente esatto se n è molto grande. Sintetizzando:

$$U_{AB} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot l_i \cdot \cos \alpha_i$$

Quando B coincide con A (linea chiusa) l'integrale di linea assume il nome di *circuitazione (C)*.

- Se la circuitazione di un vettore è nulla ($C=0$), il campo si dice *conservativo*. In questo caso l'integrale di linea dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale e non dal percorso. Si può allora definire una funzione scalare del punto dello spazio, con la quale è possibile calcolare l'integrale di linea facendo la differenza tra i valori assunti dalla funzione scalare nei punti A e B. Questa funzione scalare è detta *potenziale*, ed è definita a meno di una costante. Si possono, in questo spazio, individuare delle superfici in cui il potenziale è costante: sono le superfici equipotenziali ed hanno la proprietà di essere in ogni punto perpendicolari alle linee di forza. Infatti presi due punti diversi qualsiasi A, B su questa superficie deve essere $U_{AB}=0$, cioè $\alpha = |90^\circ|$.
- Se si considerano due superfici equipotenziali distanti d , si chiama *gradiente di potenziale* la differenza tra il potenziale dei punti della superficie 1 (V_A) ed il potenziale dei punti della superficie 2 (V_B) diviso la distanza:

$$\text{grad}V = \frac{V_A - V_B}{d}$$

Si può porre in questo caso $A = -\text{grad}V$

Campo uniforme

Flusso di un vettore

Flusso vettore

Si consideri una superficie qualsiasi, per il momento piana, all'interno di un campo per il momento uniforme. Si tracci la perpendicolare (n) alla superficie e la si orienti. Sia α l'angolo che il vettore forma con la normale alla superficie. Il flusso di un vettore attraverso la superficie è definito dall'espressione:

$$\Phi = A \cdot S \cdot \cos \alpha$$

dove S è l'area della superficie.

Nella rappresentazione del campo mediante linee di forza, si può immaginare il flusso come il numero di linee che attraversano la superficie S.

- Il flusso è nullo quando $\alpha = 90^\circ$ (linee di forza parallele alla superficie);
- è massimo positivo quando $\alpha = 0$ linee di forza perpendicolari alla superficie e concordi con la normale;
- massimo negativo se la normale orientata forma con le linee di forza un angolo di 180° .

Se il campo non è uniforme e se la superficie non è piana si può pensare di suddividere la superficie stessa in n porzioni ed eseguire per ognuna di queste parti il calcolo del flusso come precedentemente descritto. Il flusso attraverso la superficie S è allora dato dall'espressione:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n A_i \cdot S_i \cdot \cos \alpha_i$$

dove A_i è il modulo medio del vettore rappresentativo del campo per i punti della superficie S_i ed α_i è l'angolo che la normale a questa superficie forma con il vettore A_i .

Numerose sono le occasioni per far uso di questi concetti nella fisica e nella tecnica.

Nel caso specifico dell'elettrotecnica la porzione di materia non conduttrice (*dielettrico*) in cui siano presenti cariche elettriche, corrisponde ad un campo vettoriale detto *campo elettrostatico*.

- Esso è un campo conservativo;

- le linee di forza hanno origine in cariche positive e finiscono in cariche negative e corrispondono alla traiettoria che una carica positiva libera di muoversi seguirebbe;
- l'integrale di linea corrisponde alla differenza di potenziale ed è indipendente dal percorso che unisce i due punti;
- il flusso elettrostatico è proporzionale alla carica da cui partono o arrivano le linee di forza.

In un *conduttore* il *campo elettrico* è diverso da zero quando esistono delle sorgenti di energia chiamate forze elettromotrici.

- Le linee di forza sono chiuse e corrispondono alla componente del moto che le cariche libere hanno in comune;
- l'integrale di linea è la tensione tra i due punti considerati e dipende dal percorso quando i sono presenti fem indotte;
- la circuitazione del vettore campo elettrico corrisponde alla totale forza elettromotrice;
- il flusso è proporzionale all'intensità di corrente;
- Simile alla precedente, dal punto di vista matematico, è la situazione nel caso del *campo magnetico*;
- le linee di forza sono chiuse;
- l'integrale di linea è denominato tensione magnetica;
- la circuitazione del campo magnetico non è nulla ed è denominata forza magnetomotrice che corrisponde alla somma algebrica delle intensità di corrente che attraversano la linea considerata;
- il flusso magnetico corrisponde al totale impulso di tensione ($V \cdot s$) che si sviluppa sul contorno della superficie.