



Zeno Martini (admin)

GENERATORI LINEARMENTE DIPENDENTI E THEVENIN

22 February 2002

Premessa

Ho letto le righe di presentazione della nuova Rubrica di Electroportal.net "Domande & Risposte" di cui condivido il proposito, anche perché, proprio alcuni giorni fa, ho avuto l'occasione per accorgermi come possa essere frustrante la ricerca di un'informazione utile.

Avevo la necessità di comprendere come calcolare il bipolo equivalente attivo visto dai terminali di una rete quando al suo interno siano presenti generatori dipendenti di tensione o di corrente.

Premetto che sono uno studente e questo problema si è presentato nel corso della mia preparazione per l'esame di Elettrotecnica. Mi sono trovato di fronte a dubbi che il testo non chiariva, o le cui spiegazioni io non capivo: stranamente nel mio testo teorico mancavano esercizi di applicazione.

Ho allora deciso di cercare sulla rete, scrivendo in varie forme le parole del titolo su un motore di ricerca (uso di preferenza Google).

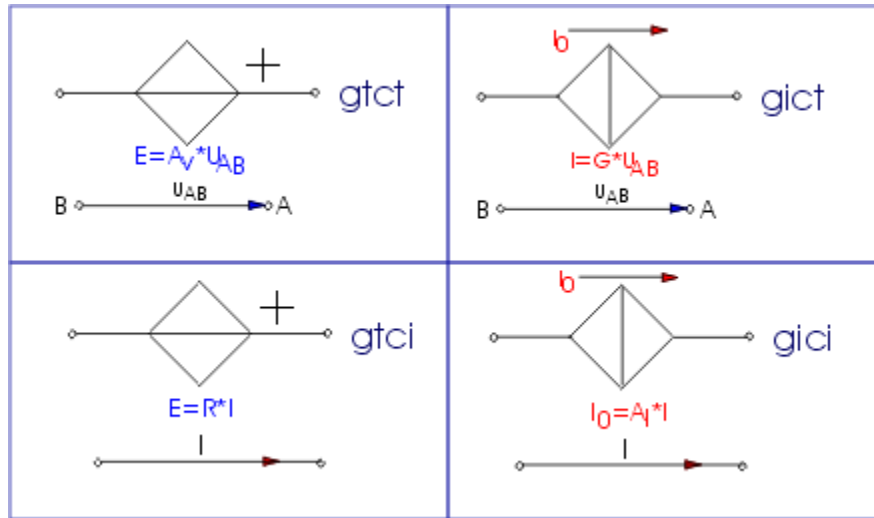
Ma oltre a trovare che i vari corsi di Elettrotecnica universitari inserivano al loro interno l'argomento, continuavo a non trovarne né lo sviluppo teorico né qualche applicazione.

In italiano ho trovato qualcosa di teorico nel sito di Sandro Petrizzelli, che voglio citare come esempio di siti che si ha il piacere di scoprire (<http://digilander.iol.it/sandry1/index.htm>), ed in inglese utili applets con semplici esercizi proposti ([electric circuits workout](#)). Trovando nel sito Electroportal.net un buon numero di lezioni chiare, che purtroppo però non trattavano il mio problema, ho deciso di interpellare lo staff che mi ha aiutato nel risolvere i miei dubbi.

Ho allora pensato di proporre questa breve lezione con la soluzione di un paio degli esercizi trovati nel sito in inglese citato, nella speranza di poter fare cosa gradita ed utile allo staff del sito ed ai suoi visitatori.

Generatori linearmente dipendenti e teorema di Thevenin.

I generatori lineari dipendenti (o pilotati o controllati) sono essere classificati in quattro configurazioni:



1. **gtct**: generatore di **tensione** controllato in **tensione**: $E = A_v \cdot U_{AB}$
2. **gtci**: generatore di **tensione** controllato in **corrente**: $E = R \cdot I$
3. **gcct**: generatore di **corrente** controllato in **tensione**: $I = G \cdot U_{AB}$
4. **gcc**: generatore di **corrente** controllato in **corrente**: $I = A_i \cdot I$

Si usa generalmente il simbolo romboidale invece della circonferenza per evidenziare graficamente la differenza esistente tra i generatori indipendenti e quelli dipendenti.

In questi ultimi la tensione ai morsetti per i generatori di tensione e la corrente erogata per i generatori di corrente non sono costanti ma sono una funzione lineare di un'altra grandezza della rete, tensione tra punti o corrente in un ramo della rete, detta grandezza di controllo.

I coefficienti di proporzionalità corrispondono ad una amplificazione (o attenuazione) di tensione (A_v), ad una resistenza di trasferimento (R), ad una conduttanza di trasferimento (G), ad una amplificazione (o attenuazione) di corrente (A_i).

Nella soluzione della rete con i principi di Kirchhoff non nascono sostanzialmente grossi problemi: basta in effetti considerarli normali generatori sostituendo la loro f.e.m. o corrente con la funzione che le descrive.

I dubbi possono sorgere quando si voglia applicare la sovrapposizione degli effetti o la resistenza equivalente di Thevenin (o di Norton) vista da due morsetti della rete.

Bisogna tenere presente che i generatori pilotati non possono essere eliminati come i generatori indipendenti (cortocircuitati quelli di tensione, aperti quelli di corrente)

ma occorre mantenerli inalterati. In generale si imposterà allora un sistema di equazioni, con il metodo delle correnti di maglia (comodo ad esempio per il calcolo della corrente di Norton, I_{no}) o quello dei potenziali di nodo (comodo per il calcolo della tensione di Thevenin, E_{th}).

La Resistenza di Thevenin (e di Norton) sarà allora il rapporto tra la E_{th} e la I_{no} .

Se si desidera un calcolo immediato della resistenza R_{th} (o R_{no}) si ricorre al metodo di calcolo generale, basato sul concetto di resistenza equivalente, applicando un generatore indipendente arbitrario di tensione tra i terminali, dopo aver cortocircuitato *tutti e solo* i generatori indipendenti di tensione ed aperti i rami con *tutti e solo* i generatori indipendenti di corrente interni alla rete. Se ne calcola la corrente erogata e si esegue il rapporto tra la sua tensione del generatore e la corrente erogata. Se quest'ultimo calcolo è condotto con il metodo illustrato nella lezione del sito sulla resistenza equivalente, si perviene al rapporto di due matrici.

E' da osservare che in questi circuiti la R_{th} può assumere valori negativi, il che fa capire che all'interno della rete sono in realtà presenti elementi attivi che danno luogo ad una erogazione di potenza.

Le precedenti considerazioni parlano di resistenza e gli esempi di calcolo che seguono sono relativi a circuiti in corrente continua. Ma tutto rimane praticamente inalterato, a parte la maggior complessità dei calcoli, se alla resistenza sostituiamo l'impedenza, operando ovviamente con i numeri complessi.

Gli esempi sono i due circuiti che vengono proposti nelle applets del sito in inglese:

Esercizio n. 1

Determinare il generatore equivalente di Thevenin.

Il simbolo romboidale indica il **gtci** la cui resistenza di trasferimento vale $R=3$. La grandezza di controllo è la corrente I_a nella resistenza di 9 ohm.

CALCOLO E_{th}

$$E_{th} = 9 \cdot I_a$$

$$I_a = (10 + 3 \cdot I_a) / (12 + 9) \text{ (II p.d.K)}$$

Da cui

$$21 \cdot I_a - 3 \cdot I_a = 10$$

$$I_a = 10/18 = 5/9 \text{ A}$$

Quindi

$$**E_{th} = 5 \text{ V}**$$

Calcolo R_{th}

Dopo aver cortocircuitato il generatore indipendente di tensione, immaginando di applicare un generatore indipendente arbitrario di tensione tra A e B, es **$U_{AB} = 1 \text{ V}$** , utilizzando il metodo delle correnti di maglia (scelte in senso orario entrambe) imposto il sistema

$$**I_a = i_1 - i_2**$$

$$**21 \cdot i_1 - 9 \cdot i_2 = 3 \cdot I_a**$$

$$**-9 \cdot i_1 + 19 \cdot i_2 = -1**$$

Sarà

$$**R_{th} = U_{BA} / i_2 = -1 / i_2**$$

Sostituendo **I_a** nella seconda

$$**21 \cdot i_1 - 9 \cdot i_2 - 3 \cdot i_1 + 3 \cdot i_2 = 0**$$

si perviene al sistema

$$**18 \cdot i_1 - 6 \cdot i_2 = 0**$$

$$-9 \cdot i_1 + 19 \cdot i_2 = -1$$

Da cui

$$i_2 = -18 / (18 \cdot 19 - 6 \cdot 9) = -18 / 288 = -1/16$$

Quindi

$$R_{th} = 16 \text{ ohm}$$

Esercizio N.2

Determinare il generatore equivalente di Norton ($I_{sc}=I_{no}$, $R_{th}=R_{no}$) per la rete di figura.

Il simbolo romboidale è un **gcct** e la grandezza di controllo è indicata con V_A , tensione tra il punto comune alle resistenze di 4 e 6 ohm e la massa.

CALCOLO di I_{no}

Cortocircuitando i morsetti si ha:

$$I_{no} = -24/10 + 1 \cdot V_A$$

$$V_A = (24/10) \cdot 4 - 24 = -14,4 \text{ V}$$

Quindi

$$I_{no} = -2,4 - 14,4 = -16,8 \text{ A}$$

Calcolo R_{no}

Cortocircuitando il generatore indipendente ed applicando ai morsetti una tensione arbitraria di 1 V rispetto a massa, si ha:

$$V_A = 4/10 = 0,4 \text{ V.}$$

La corrente erogata dal generatore applicato di 1 V è:

$$I = 1/10 - 1 \cdot V_A = 0,1 - 0,4 \text{ A} = -0,3 \text{ A}$$

Si ha allora

$$\mathbf{R_{th} = 1/I = -3,33 \text{ Ohm}}$$