



Enrico Biagi

SIMILITUDINE
11 January 2005

SIMILITUDINE GEOMETRICA DEI TRASFORMATORI

Lo studio della similitudine geometrica e le conclusioni che da essa si possono trarre permettono di fissare i criteri di progettazione delle macchine elettriche.

In questo caso viene trattata la similitudine geometrica fra trasformatori.

1. DIMENSIONI LINEARI, SUPERFICI, VOLUMI

Si considerino due trasformatori simili negli elementi geometrici, tali cioè che l'uno riproduca in scala "m" volte maggiore l'altro (m = rapporto fra le dimensioni lineari dei due trasformatori).

Tra gli elementi geometrici si hanno pertanto le seguenti relazioni:

- Dimensioni lineari

$$L_2 = m \cdot L_1$$

- Superfici

$$S_2 = m^2 \cdot S_1$$

- Volumi

$$V_2 = m^3 \cdot V_1$$

I due trasformatori, costruiti con materiali di uguali caratteristiche, abbiano inoltre le stesse "utilizzazioni" dei materiali attivi: siano cioè identiche l'induzione B_M nel ferro del nucleo e la densità di corrente d nel rame degli avvolgimenti.

2. POTENZE, PESI, PERDITE

Partendo da queste premesse, per i due trasformatori si possono allora ricavare le relazioni riguardanti:

- **Le potenze**
- **I pesi**
- **Le perdite**

q Relazione tra le potenze

La potenza è proporzionale al prodotto della tensione per la corrente:

$$P = K_p \cdot V \cdot I$$

Ricordando che:

$$V = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B_M \cdot S_{fe} = K_v \cdot S_{fe}$$

$$(K_v = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B_M)$$

$$I = \delta \cdot S_{cu} = K_i \cdot S_{cu} \quad (K_i = \delta)$$

dove:

- S_{fe} = sezione del ferro
- S_{cu} = sezione del rame

si ha:

$$P = K_p \cdot K_v \cdot S_{fe} \cdot K_i \cdot S_{cu} = K \cdot S_{fe} \cdot S_{cu}$$

$$(K = K_p \cdot K_v \cdot K_i)$$

cioè la potenza è proporzionale al prodotto delle sezioni del ferro e del rame.

Le potenze dei due trasformatori valgono:

$$1) P_1 = K \cdot S_{fe1} \cdot S_{cu1}$$

2)

$$P_2 = K \cdot S_{fe2} \cdot S_{cu2} = K \cdot m^2 \cdot S_{fe1} \cdot m^2 \cdot S_{cu1} = m^4 \cdot K \cdot S_{fe1} \cdot S_{cu1}$$

Pertanto:

$$P_2 = m^4 \cdot P_1$$

cioè: Le potenze variano secondo la quarta potenza del rapporto fra le dimensioni lineari.

- Esempio

Se $m = 2$, si ha:

$$P_2 = 2^4 \cdot P_1 = 16 \cdot P_1$$

q **Relazione fra i pesi**

I pesi dei materiali attivi sono proporzionali ai volumi. Infatti indicando con g_{sp} il peso specifico e con V il volume dei materiali attivi, si ha:

$$G = g_{sp} \cdot V$$

I pesi dei due trasformatori valgono:

$$1) G_1 = g_{sp} \cdot V_1$$

$$2) G_2 = g_{sp} \cdot V_2 = g_{sp} \cdot m^3 \cdot V_1$$

pertanto:

$$G_2 = m^3 \cdot G_1$$

cioè: I pesi variano secondo la terza potenza del rapporto fra le dimensioni lineari

Esempio

Se $m = 2$, si ha:

$$G_2 = 2^3 \cdot G_1 = 8 \cdot G_1$$

q **Relazione fra le perdite**

Le perdite sono proporzionali ai pesi dei materiali attivi. Si ha infatti per le perdite nel ferro e nel rame:

$$W_{fe} = w_s \cdot B_M^2 \cdot G_{fe}$$

$$W_{cu} = 2,4 \cdot \delta^2 \cdot G_{cu}$$

Pertanto si può scrivere:

$$W = W_{fe} + W_{cu} = K \cdot (G_{fe} + G_{cu}) = K \cdot G$$

Le perdite nei due trasformatori valgono:

$$1) W_1 = K \cdot G_1$$

$$2) W_2 = K \cdot G_2 = K \cdot m^3 \cdot G_1$$

E quindi:

$$W_2 = m^3 \cdot W_1$$

cioè: Le perdite variano secondo la terza potenza del rapporto fra le dimensioni lineari.

Esempio

Se $m = 2$, si ha

$$W_2 = 2^3 \cdot W_1 = 8 \cdot W_1$$

3. PESI PER UNITA' DI POTENZA, RENDIMENTI, CORRENTI A VUOTO PERCENTUALI, SOVRATEMPERATURE

In base a quanto visto in precedenza si possono ricavare le relazioni fra alcuni parametri caratteristici dei trasformatori, e in particolare:

- **Relazioni fra i pesi per unità di potenza (pesi specifici)**
 - **Relazioni fra i rendimenti**
- **Relazioni fra le correnti a vuoto percentuali**
- **Relazioni fra le sovratemperature**

q Pesi per unità di potenza (pesi specifici)

Il peso per unità di potenza (peso specifico) è dato dal rapporto fra il peso del trasformatore e la sua potenza, cioè:

$$g = \frac{G}{P}$$

La conclusione che si trae dalla relazione precedente è che:

Siccome il peso G aumenta meno della potenza P , il peso per unità di potenza (Kg/KVA) diminuisce al crescere della potenza.

Infatti se il peso specifico del primo trasformatore vale:

$$g_1 = \frac{G_1}{P_1}$$

per il secondo si ha:

$$g_2 = \frac{G_2}{P_2} = \frac{m^3 \cdot G_1}{m^4 \cdot P_1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{G_1}{P_1} = \frac{1}{m} \cdot g_1$$

Esempio

Per $m = 2$, se per il primo trasformatore si ha, per esempio, $g_1 = 10$ Kg/KVA, per il secondo si ottiene:

$$g_2 = \frac{1}{2} \cdot g_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ Kg/KVA}$$

q **Rendimenti**

Il rendimento di un trasformatore vale:

$$\eta = \frac{P}{P + W} = \frac{1}{1 + \frac{W}{P}}$$

Dalla relazione precedente si trae la conclusione che:

Siccome le perdite aumentano meno delle potenze, il rendimento aumenta al crescere della potenza.

Infatti se il rendimento del primo trasformatore vale:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + \frac{W_1}{P_1}}$$

per il secondo si ottiene:

$$\eta_2 = \frac{1}{1 + \frac{W_2}{P_2}} = \frac{1}{1 + \frac{m^3 \cdot W_1}{m^4 \cdot P_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{W_1}{P_1}}$$

Esempio

Supponendo che le perdite del primo trasformatore siano pari al 10 % della potenza nominale ($W_1 = 0,1 P_1$, ossia $W_1/P_1 = 0,1$), si ha:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + 0,1} = 0,909$$

Per $m = 2$, il rendimento del secondo trasformatore vale:

$$\eta_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1} = 0,952$$

q **Correnti a vuoto percentuali**

La corrente a vuoto in un trasformatore vale:

$$I_o = \frac{\Phi_M \cdot R}{\sqrt{2} \cdot N}$$

dove il flusso Φ_M nel nucleo, la riluttanza R del circuito magnetico, le spire N valgono rispettivamente:

$$\Phi_M = B_M \cdot S_{fe}$$

$$R = \frac{l_{fe}}{\mu \cdot S_{fe}}$$

$$N = \frac{V}{4,44 \cdot f \cdot B_M \cdot S_{fe}}$$

Sostituendo si ottiene:

$$I_o = \frac{B_M \cdot S_{fe} \cdot \frac{l_{fe}}{\mu \cdot S_{fe}}}{\sqrt{2} \cdot \frac{V}{4,44 \cdot f \cdot B_M \cdot S_{fe}}}$$

Tenendo presente che $S_{fe} \cdot l_{fe} = Vol_{fe}$ (volume del ferro), si ha:

$$I_o = \frac{4,44 \cdot f \cdot B_M^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot V} \cdot Vol_{fe}$$

Si vede intanto che la corrente a vuoto è proporzionale al volume del ferro.

Ricordando, poi, che il valore percentuale della corrente a vuoto vale:

$$I_o \% = \frac{I_o}{I} \cdot 100$$

e che:

$$I = \frac{P}{K_p \cdot V}$$

si ottiene:

$$I_o \% = 100 \cdot \frac{\frac{4,44 \cdot f \cdot B_M^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot V} \cdot Vol_{fe}}{\frac{P}{K_p \cdot V}} = 100 \cdot \frac{4,44 \cdot K_p \cdot f \cdot B_M^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot P} \cdot Vol_{fe}$$

cioè:

$$I_o \% = K_o \cdot \frac{Vol_{fe}}{P}$$

$$\left(K_o = 100 \cdot \frac{4,44 \cdot K_p \cdot f \cdot B_M^2}{\sqrt{2} \cdot \mu \cdot P} \cdot Vol_{fe} \right)$$

Dalla relazione precedente si ricava che la corrente a vuoto percentuale è proporzionale al rapporto fra il volume del ferro e la potenza e quindi si può dire che:

Siccome i volumi aumentano meno delle potenze, la corrente a vuoto percentuale diminuisce all'aumentare della potenza.

Infatti se la corrente a vuoto percentuale del primo trasformatore vale:

$$I_o \%_1 = K_o \cdot \frac{Vol_{fe1}}{P_1}$$

per il secondo si ottiene:

$$I_o \%_2 = K_o \cdot \frac{Vol_{fe2}}{P_2} = K_o \cdot \frac{m^3 \cdot Vol_{fe1}}{m^4 \cdot P_1} = \frac{1}{m} \cdot I_o \%_1$$

Esempio

Per $m = 2$, se per il primo trasformatore si ha $I_0\%_1 = 8\%$, per il secondo si ottiene:

$$I_0\%_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0\%_1 = \frac{1}{2} \cdot 8\% = 4\%$$

q **Sovratemperature**

La sovratemperatura di un trasformatore può essere determinata con la relazione:

$$\Delta\theta = \frac{W}{K \cdot S}$$

La relazione precedente evidenzia che:

Siccome le perdite aumentano più delle superfici, la sovratemperatura (a parità di coefficiente di trasmissione del calore) aumenta al crescere della potenza.

Infatti se la sovratemperatura del primo trasformatore è:

$$\Delta\theta_1 = \frac{W_1}{K \cdot S_1}$$

per il secondo si ha:

$$\Delta\theta_2 = \frac{W_2}{K \cdot S_2} = \frac{m^3 \cdot W_1}{K \cdot m^2 \cdot S_1} = m \cdot \frac{W_1}{K \cdot S_1} = m \cdot \Delta\theta_1$$

Esempio

Supponendo per il primo trasformatore una sovratemperatura $Dq = 60^\circ\text{C}$, per il secondo, per $m = 2$, si ha:

$$\Delta\theta_2 = 2 \cdot 60 = 120^\circ\text{C}$$

