Zeno Martini (admin)

TRASFORMATA DI LAPLACE

1 January 2004

Il comportamento dinamico di un qualsiasi sistema fisico a partire da un determinato istante, detto istante 0, è descritto da un sistema di equazioni differenziali. La trasformata di Laplace è uno strumento matematico efficace per affrontarne lo studio. Essa ha la proprietà di trasformare le equazioni differenziali, di integrazione difficoltosa, in equazioni algebriche per le quali esistono più agevoli algoritmi risolutivi. Fondamentali, da questo punto di vista sono i teoremi, più avanti enunciati, di derivazione ed integrazione.

Essa è definita da

$$Y(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot y(t) \cdot dt$$

in cui y(t) è una funzione del tempo nota per t>0, ed *s è* una variabile complessa la cui parte reale è tale da rendere convergente l'integrale, condizione che definisce l'esistenza della Y(s).

Ad esempio se y(t)=1(t) (gradino unitario), l'integrale converge per ogni s positivo; se $y(t)=e^{2t}$, la parte reale di s deve essere >2. In generale per ogni y(t) si deve definire un'ascissa di convergenza, **c**, per la Y(s) nel piano complesso. La retta parallela all'asse immaginario passante per **c,** definisce il dominio, cioè il campo di esistenza, di Y(s) come il semipiano alla destra di **c**.

Generalmente si scrive

$$Y(s) = L\left[y(t)\right]$$

Y(s) è detta trasformata di y(t).

Ecco una tabella in cui sono riportate le trasformate di alcune funzioni comuni.

TAB. 1

n.	**y(t)**	**Y(s)**
1	$k \cdot \delta(t)$ (impulso di ampiezza k. d(t) è l'impulso unitario definito come funzione che vale 0 quando t è diverso da zero ed il cui integrale, tra i limiti che comprendono zero, vale uno.)	k NB: in accordo al teorema più avanti enunciato, l'impulso di ampiezza k è la derivata del gradino di ampiezza k.
2	k (gradino di ampiezza k: è una funzione che vale zero per t<0, K per t>0)	$\frac{k}{s}$ NB: in accordo al teorema più avanti enunciato, il gradino di ampiezza k è l'integrale dell' impulso di di ampiezza k.
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
4	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
6	$\frac{t}{2\omega} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
7	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

8	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$

Antitrasformazione

Nota la trasformata di Y(s) di una funzione y(t), la y(t) si può determinare con

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{k-j\infty}^{k+j\infty}e^{st}\cdot Y(s)\cdot ds$$

dove k è una costante appartenente al dominio di convergenza della Y(s).

Le difficoltà inerenti il calcolo dell'integrale in campo complesso, fanno spesso preferire, nell'uso pratico, il ricorso alle tavole di trasformazione. In tal caso il metodo consiste nel confrontare la funzione di s, spesso elaborandola algebricamente, con quelle presenti in tabelle tipo tab. 1, per trovare la corrispondente funzione nella variabile t. Di sicuro aiuto sono poi i teoremi più avanti enunciati. Il difetto di questo metodo, è di non delineare un procedimento generale e sicuro, è una specie di empirismo algebrico che richiede una buona dose di fantasia e l'esistenza di trasformate già calcolate.

Ecco un paio di semplici esempi:

Esempio: 1

Sia nota

$$Y(s)=\frac{1}{s+2}$$

Ricorrendo alla tabella 1, tenendo conto dei teoremi elencati nella sottostante tabella (nel caso specifico quello della traslazione in campo complesso) si ha immediatamente

$$y(t)=e^{-2t}$$

Esempio.2

Sia

$$Y(s)=\frac{2s+6}{s^2+4}$$

con una piccola manipolazione algebrica si ha

$$Y(s) = \frac{2s+6}{s^2+4} = 2 \cdot \frac{s}{s^2+2^2} + 3 \cdot \frac{2}{s^2+2^2}$$

da cui, con l'uso della tabella 1

$$y(t) = 2 \cdot \cos 2t + 3 \cdot \sin 2t$$

TEOREMI $Y(s) = L[y(t)]$; $F(s) = L[f(t)]$		
Teorema di sovrapposizione	$y(t) = \sum_r y_r(t) \Rightarrow Y(s) = \sum_r Y_r(s)$	La trasformata di una somma è la somma delle trasformate
Cambiamento di scala	$y(t) = f\left(\frac{t}{a}\right) \Rightarrow Y(s) = a \cdot F(a \cdot s)$	La trasformata della funzione che si ottiene dividendo per una costante ***a*** la variabile indipendente t, si ottiene moltiplicando per a sia la variabile s della trasformata della funzione originaria che la stessa trasformata.
Traslazione in campo complesso	$y(t) = e^{at} \cdot f(t) \Rightarrow Y(s) = F(s-a)$	La trasformata del prodotto della funzione per $\boldsymbol{e^{at}}$ è la trasformata traslata di ***a***.
Traslazione in campo reale	$y(t) = f(t-a) \Rightarrow Y(s) = e^{-sa} \cdot F(s)$	La trasformata di una funzione traslata di a

		nel tempo è il prodotto della trasformata della funzione per e^{-sa}
Teorema del valore iniziale	$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot Y(s)$	Il valore della funzione all'istante iniziale è il valore del limite del prodotto della trasformata per la variabile *s* quando *s* tende a infinito.
Teorema del valore finale	$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)$	Il valore finale della funzione è il valore del limite del prodotto della trasformata per la variabile *s* con *s* che tende a zero.
Teorema di derivazione	$y'(t) \Rightarrow s \cdot Y(s) - y(0)$	La trasformata della derivata è il prodotto della trasformata per la variabile *s* meno il valore della funzione nell'istante 0 (valore iniziale)
Teorema di integrazione	$\int_{0^-}^{t} y(t) \Rightarrow \frac{Y(s)}{s}$	La trasformata dell'integrale della funzione è il rapporto tra la trasformata e la variabile s.

Ancora un paio di esercizi

Es.1: la trasformata di

$$e^{-at}\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

è, applicando il teorema di traslazione in campo complesso ed utilizzando la tab. 1 riga 3.

$$\frac{1}{(s+a)^n}$$

Es.2: la trasformata di

$$e^{-at}\cdot\cos\omega t$$

è, applicando il teorema di traslazione in campo complesso ed utilizzando la tab. 1 riga 5.

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$