Zeno Martini (admin)

# RETI

1 January 2004

Articolo n° 3 su 13 del corso "**Elettrotecnica di base**". Vai all'**indice** del corso.

Paragrafi dell'articolo:



## Introduzione

In questo articolo e nel successivo, tratteremo circuiti elettrici semplici e complessi (reti ), discutendone i principali metodi di soluzione.Si farà riferimento a **reti lineari** , costituite da bipoli le cui caratteristiche (R,L,C, E, $I_0$) non dipendono dai valori di tensione e corrente.Risolvere una rete significa saper determinare il valore di ogni corrente e di ogni tensione.Quando si conoscono gli elementi costitutivi ed i loro collegamenti, i due principi di Kirchhoff forniscono il numero di equazioni risolutrici. Essi saranno enunciati per grandezze variabili nel tempo, ma nell'applicarli, per semplicità matematica, considereremo grandezze continue. Le reti saranno allora costituite da generatori e resistori essendo , in continua, i condensatori circuiti aperti e gli induttori cortocircuiti. Procedimenti in tutto simili possono applicarsi in continua alle reti ( che però non tratteremo) di generatori e condensatori, nel qual caso al calcolo delle correnti, che sono nulle, corrisponde il calcolo della carica dei condensatori, mentre le capacità svolgono il ruolo matematico delle conduttanze.Gli stessi metodi algebrici, dopo opportune trasformazioni, sono applicabili anche in regime variabile: lo si vedrà in particolare per le grandezze alternate sinusoidali negli art. 5 e 6

## Collegamenti fondamentali tra bipoli

**Serie**: due bipoli si dicono in serie quando sono attraversati dalla ***stessa intensità*** di corrente.Essi in tal caso hanno in comune un terminale ed in questo punto comune non converge nient'altro.Possono essere in serie sia bipoli generatori che bipoli utilizzatori logicamente compatibili: non ha senso la serie di due generatori ideali di corrente in quanto la corrente dovrebbe assumere contemporaneamente due valori diversi.

**Parallelo:** due bipoli sono in parallelo quando sono collegati agli stessi due punti. Ai capi dei bipoli in parallelo c'è dunque la ***stessa d.d.p***. Possono essere posti in parallelo sia bipoli utilizzatori che generatori logicamente compatibili: non ha senso il parallelo di due generatori ideali di tensione in quanto la tensione ai loro capi dovrebbe assumere due valori diversi contemporaneamente.

## Circuiti semplici

Circuito semplice è un percorso chiuso formato da bipoli in serie. Tra i bipoli connessi ci sarà almeno un bipolo generatore ed almeno un bipolo utilizzatore.

### Secondo principio di Kirchhoff (KVL)

Se immaginiamo l'unità di carica compiere un percorso completo, quindi partire dal punto a potenziale A ed arrivare allo stesso punto, il lavoro totale, o, ciò che è lo stesso, l'energia totale trasformata, è nulla. Ciò significa che attraversando i bipoli utilizzatori la carica ha perso completamente l'energia acquistata transitando attraverso i bipoli generatori. Ricordando il significato di tensione (o differenza di potenziale), è immediato tradurre la constatazione in quello che è noto come secondo principio di Kirchhoff (II pdK).

Esso vale per qualsiasi percorso chiuso di bipoli, anche se questo non costituisce un circuito semplice, ma fa parte di un circuito complesso (nel qual caso si parlerà di *maglia*). Afferma che:

***In in percorso chiuso qualsiasi, la somma algebrica delle tensioni ai capi dei bipoli che lo costituiscono è nulla.***

$$\mathbf{S\ u_i(t) = 0} \qquad 3.\ 1$$

Scelto un verso arbitrario di percorrenza della maglia (v.p.), sono positive le tensioni la cui freccia rappresentativa (art.1, fig. 1.3 ) è concorde al v.p., negative le altre.Per le grandezze continue scriveremo

$$\mathbf{S\ U_i = 0} \qquad \mathbf{3.\ 2}$$

Come ogni equazione, il principio è un vincolo per le tensioni dei bipoli interessati. Da solo consente di determinare una tensione incognita note che siano tutte le altre. Ovviamente se è noto il bipolo di cui si è calcolata la tensione incognita, si può calcolarne la corrente che, nel caso di circuito semplice, è l'intensità del circuito stesso. Una semplice ed utile applicazione di quest'ultima considerazione è:

***la legge di Ohm per un circuito chiuso***

La enunciamo per un circuito in continua costituito da generatori ideali di tensione e resistenze.Fissato arbitrariamente un verso per la corrente, la sua *intensità è data dal rapporto tra la somma algebrica delle forze elettromotrici e la somma aritmetica delle resistenze.*

$$I=S_aE/S\,R \qquad \textbf{3. 3}$$

Si considerano positive le f.e.m. dei bipoli che, rispetto al verso della corrente, rispettano la convezione del generatore ( intensità uscente dal +).La fig. 3.1.a mostra un esempio.

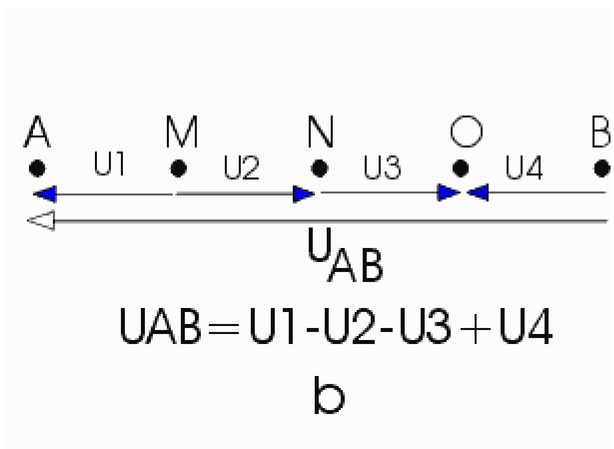



**Fig. 3. 1**

## Bipoli composti (rami)

Si definisce *ramo* la serie aperta di due o più bipoli. E' dunque a sua volta un bipolo, i cui poli sono i terminali liberi del primo e dell'ultimo dei componenti. E' pertanto caratterizzato da una intensità di corrente e da una tensione. Se indichiamo con $\mathbf{u_{AB}(t)}$ la tensione ai suoi capi, essa può essere determinata dalla conoscenza della composizione del ramo e dall'applicazione del II p.d.K. considerando come chiusura del ramo la stessa tensione. Si può allora scrivere:

$$\mathbf{u_{AB}(t) + S\ u_i(t)=0} \qquad 3.\ 4$$

in cui le $u_i(t)$ sono le tensioni dei bipoli elementari del ramo.Il calcolo della tensione ai capi del ramo così condotto, è spesso chiamata ***legge di Ohm generalizzata.*** In pratica, si può dire che *la tensione tra due punti è la somma algebrica delle tensioni ai capi dei bipoli che formano un percorso che unisce i due punti*. Rappresentata ad esempio la tensione da calcolare $U_{AB}$ con la solita freccia verso A, si prendono con il segno + le tensioni dei bipoli la cui freccia rappresentativa è rivolta verso A, negative le altre. La fig. 3.1. b mostra l'esempio: si lascia al lettore l'immediata verifica dell'uguaglianza con l'applicazione della definizione di differenza di potenziale.

**Esercizio 3. 1**

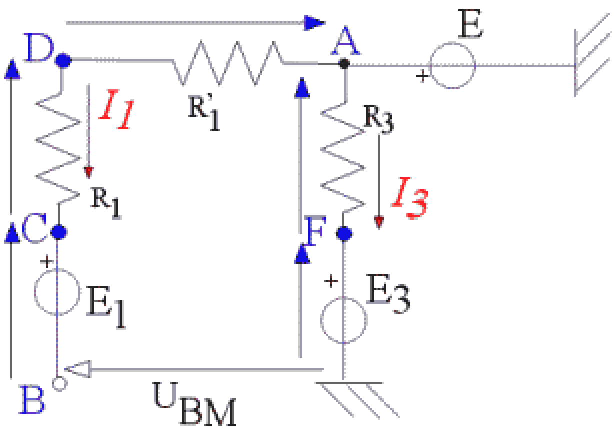



**Fig 3.2**

Nel circuito di figura

$R_1=R'_1=R_3=100$ W;

E1=50 V, $E_3=100$ V;

$I_1=2$ A; $I_3=1$ A

Determinare la tensione tra B e massa ed il valore di E.

Applicando la legge di Ohm generalizzata si ha

$U_{BM}=-U_{CB}-U_{DC}-U_{AD}+U_{AF}+U_{FM}=-E_1-R_1*I_1-R'_1*I_1+R_3*I_3+E_3=-50-2*100-2*100+1*100+100=-250$ V

Inoltre

$E=U_{AM}=R_3*I_3+E_3=100*1+100=200$ V

**Esercizio 3. 2**

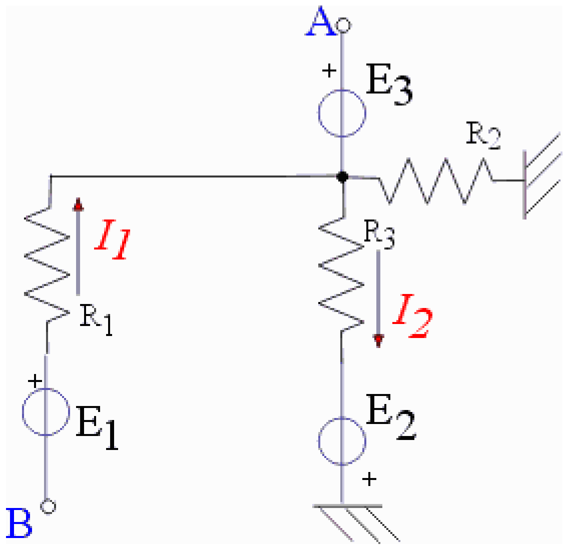



**Fig.3.3**

Con riferimento alla fig. 3.3 si propone l'esercizio.

$E_1$=150 V; $E_2$=50 V; $E_3$=60 V

$I_1$=2 A; $I_2$=4A

$R_1$=50 W; $R_3$=10 W;

Calcolare le tensioni $U_{AB}$, $U_{AM}$, $U_{BM}$

(110 V; 50 V; -60V)

## Generatore reale di tensione

Come importante applicazione della legge di Ohm generalizzata, consideriamo il bipolo costituito dalla serie di un generatore ideale di tensione con un resistore. L'intensità di corrente dà luogo, ai capi della resistenza, ad una tensione opposta a quella della f.e.m. se la corrente esce dal +, concorde se vi entra.

Nel primo caso il bipolo rappresenta un **generatore reale di tensione**, lineare, nel secondo caso un **utilizzatore attivo reale**. Per grandezze continue si hanno rispettivamente le equazioni

$\mathbf{U_{AB} = E - R_i I}$ per il generatore 3. 5

$\mathbf{U_{AB} = E + R_i I}$ per l'utilizzatore attivo 3. 6

E' molto istruttivo soffermarsi sulle proprietà energetiche del generatore reale.Se **I=0** (*funzionamento a vuoto*) la tensione ai morsetti è pari alla f.e.m. del generatore.

$$(U_{AB})_{I=0} = E \qquad 3.7$$

La 3.7 fornisce il criterio per misurare la f.e.m. di un generatore di tensione: un voltmetro ideale ai suoi morsetti quando non c'è alcun carico collegato fornisce il valore di E.

Al crescere dell'intensità erogata la tensione ai morsetti diminuisce. Ciò significa che il generatore non è in grado di trasferire al circuito alimentato tutta l'energia fornita all'unità di carica: una parte va dissipata al suo interno in calore.Se $U_{AB}=0$ (*funzionamento in cortocircuito*) la corrente erogata è massima ( *corrente di cortocircuito,* $I_{cc}$):

$$(I)_{U_{AB}=0} = I_{cc} = E/R_i \qquad 3.8$$

$R_i$ è chiamata *resistenza interna* del generatore**.**

La 3.8 fornisce il criterio per misurare la Icc: si cortocircuitano i morsetti del generatore e si misura l'intensità di corrente con un amperometro ideale. La possibilità è però spesso teorica in quanto la corrente di cortocircuito è troppo elevata per il generatore. Se è possibile annullare la E si può ricorrere alla misura di $R_i$.

Per le potenze si ha

**potenza erogata** o potenza utile $P_u = U_{AB} * I$ 3. 9

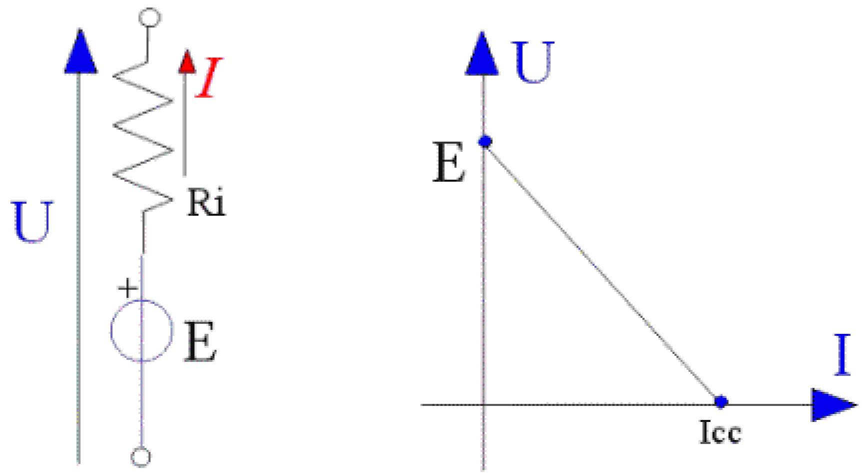
**potenza persa** per effetto joule $P_j = R_i * I^2$ 3. 10

**potenza generata** $P_G = E * I$ 3. 11

Si definisce *rendimento elettrico* del generatore il rapporto

$$h = P_u / P_G \qquad 3.12$$

La fig. 3.4.sintetizza graficamente le precedenti considerazioni.



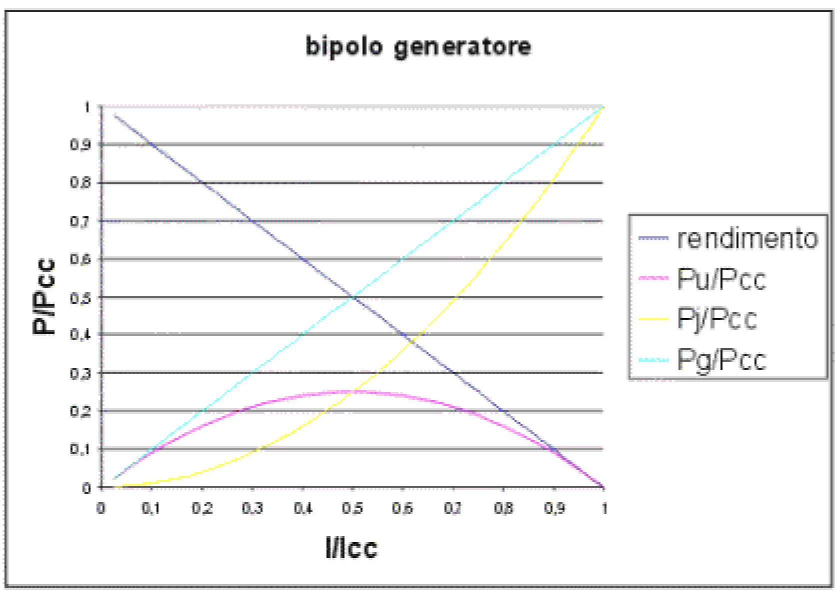




**fig. 3. 4**

I grafici sono normalizzati: in ordinate ci sono le potenze relative alla massima potenza del generatore (potenza di cortocircuito: $\mathbf{P_{cc}=E*I_{cc}}$), in ascisse il rapporto tra la I e la $I_{cc}$. La massima potenza in uscita si ha per $I=I_{cc}/2$, quando il rendimento è del 50%, ed è un quarto della $P_{cc}$. Si ha quando il resistore alimentato ha un valore pari alla resistenza interna del generatore: $\boldsymbol{R=R_i}$è detta condizione di *adattamento*. E' una condizione che si cerca di ottenere per generatori di segnale, dove la potenza è piccola. Quando invece si ha a che fare con generatori di potenza, il rendimento più alto possibile è l'esigenza predominante. Questo si ottiene per correnti molto inferiori alla $I_{cc}$. Generalmente si definisce per il generatore una *corrente nominale, $I_N$,* che è l'intensità per cui esso è dimensionato, è cioè la massima corrente erogabile per un tempo illimitato. Per i generatori di potenza la $I_{cc}$ è molto maggiore di $I_N$ (qualche decina a volte centinaia di volte) e distruggerebbe in brevissimo tempo il generatore, se non fosse protetto.

**Esercizio 3. 3**

*Un generatore la cui potenza di cortocircuito è di 10 kW e la cui tensione a vuoto è di 50 V, alimenta una resistenza di 5 W. Calcolare la corrente erogata ed il suo rendimento*

La resistenza interna del generatore è $R_i$=$E^2$/$P_{cc}$= $50^2$/$10^4$=0,25 W. Per la legge di Ohm per un circuito chiuso si ha I=E/($R_i$+R)=50/5,25=9,52 A. La tensione sul carico è U=R*I=5*9,52=47,6 V La potenza erogata $P_u$=U*I=47,6*9,52=453 W La potenza generata $P_g$=E*I=50*9,52=476 W

Il rendimento elettrico h =$P_u$/$P_g$=453/476=0,952 (95,2%)

**Esercizio 3. 4**

*Un generatore reale e lineare di tensione eroga una corrente di 0,4 A quando il carico resistivo è R=1 W, 0,22 A con un carico di 2 W. Calcolare la sua potenza di cortocircuito ed il rendimento nel primo caso* Si ha $P_{cc}$=E*$I_{cc}$=$E^2$/$R_i$: bisogna determinare $R_i$ ed E La tensione ai capi del generatore, che è la tensione sul carico resistivo, è data da U=E-$R_i$*I. Si ha dunque 0,4*1=E-$R_i$*0,4 nel primo caso 0,22*2=E-$R_i$*0,22 nel secondo caso Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene 0,04=0,18*$R_i$ $R_i$=0,04/0,18=0,22 W E=0,4+0,4*0,222=0,488 V $P_{cc}$= $(0,488)^2$/0,222=1,07 W Il rendimento è dato da Pu/Pg che si può anche calcolare con U/E essendo comune la I per le due potenze. Quindi

h%=100*U/E=40/0,488=82%

## Circuiti complessi

Un circuito complesso è un insieme di circuiti semplici aventi rami in comune.

**Primo principio di Kirchhoff (KCL)**

Si definisce nodo una qualsiasi superficie chiusa che interseca rami di un circuito. Il primo principio di Kirchhoff (I p.d.K) afferma che:

***In un nodo la somma algebrica delle intensità di corrente dei rami che vi confluiscono è in ogni istante nulla.***

$$\Sigma\, i(t) = 0 \qquad 3.13$$

Convenzionalmente si considerano positive le intensità entranti nel nodo, negative quelle uscenti, ma ovviamente nulla cambia scegliendo la convenzione opposta. Il principio può anche essere enunciato nella forma:

*in ogni istante la somma aritmetica delle intensità di correnti entranti nel nodo è uguale alla somma aritmetica delle intensità di corrente uscenti.*

Per le grandezze continue:

$$\Sigma\, I = 0 \qquad 3.14$$

Il primo principio si giustifica con il fatto che, affinché il regime di correnti permanga nel tempo, non può esservi nel nodo un continuo accumulo di cariche, positive o negative, come si avrebbe nell'ipotesi di somma algebria delle intensità diversa da zero: la forza di repulsione coulombiana conseguente all'accumulo, finisce con l'impedire l'arrivo di nuove cariche dello stesso tipo arrestando la corrente nei rami. In un rete composta di ***l*** rami ed ***n*** nodi (qui da intendersi come punti di confluenza di almeno tre rami), i due principi consentono di scrivere ***l*** *equazioni indipendenti*: ***n-1*** con **il I p.d.K**. equazioni ai nodi, ***l-(n-1)*** con il **II p.d.K**. equazioni alle maglie. Indipendenti significa che nessuna equazione è ricavabile dalle altre con artifici matematici. Nella trattazione che seguirà ci si occuperà di grandezze continue, cioè costanti nel tempo, per la semplicità matematica della trattazione. Per le grandezze variabili si potranno usare i metodi ed i concetti esposti, ricorrendo a strumenti matematici in grado di trasformare simbolicamente in calcoli algebrici le equazioni differenziali ( equazioni in cui le incognite sono le funzioni del tempo che in esse compaiono insieme alle loro derivate) conseguenti all'applicazione del II p.d.K. per la presenza dei bipoli accumulatori.

La fig. 3.5 mostra graficamente l'applicazione dei due principi

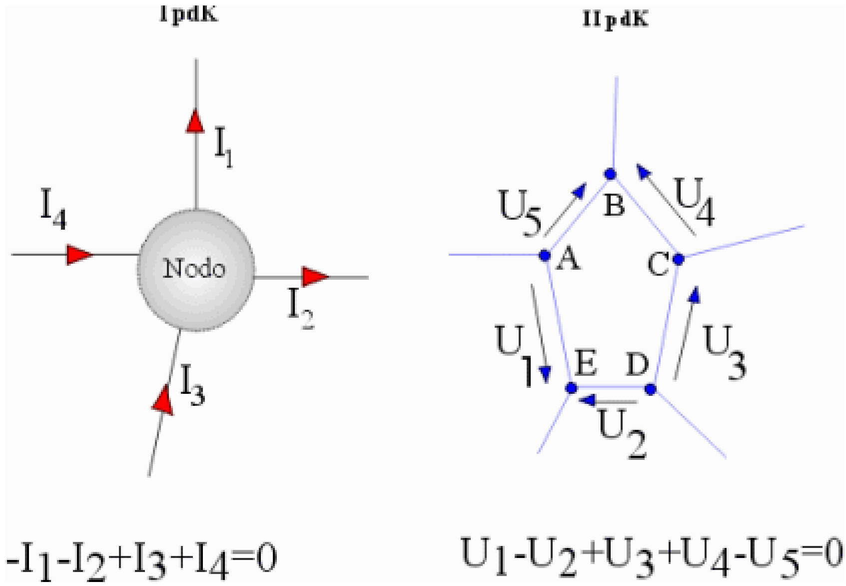



fig. 3. 5

## Applicazione dei p.d.K puri

Consideriamo la rete di fig. 3.6.I rami sono *l=6* ed i nodi *n=4 ; 3 =l-(n-1)* sono le maglie indipendenti. Le maglie che è possibile individuare sono in realtà più di tre, ma bisogna considerare solo quelle che danno luogo ad equazioni indipendenti. Un metodo sicuro per individuarle è il seguente: si inizia considerando una qualsiasi maglia, se ne elimina un ramo, si considera una nuova maglia nel sottoinsieme di rami rimasti, si elimina di nuovo un suo ramo e così si procede fino a che non ci sono più maglie chiuse. L'insieme dei rami rimasti, che uniscono tutti gli n nodi senza formare maglie si chiama albero della rete, l'insieme dei rami eliminati è il co_albero ed il numero di rami del co_albero è il numero delle maglie indipendenti. Considerando noti i generatori e le resistenze, risolvere la rete significa determinare le intensità di corrente nei rami e le d.d.p. ai capi dei generatori di corrente. Occorre allora fissare, *arbitrariamente*, il verso delle correnti incognite nei rami e la polarità delle tensioni ai capi dei generatori ideali di corrente. Per una più rapida scrittura del II p.d.K. che evidenzi le correnti incognite, tenendo conto della definizione di generatore ideale di tensione e della legge di Ohm si ha:

$$S_a R*I+S_a U_g=S_a E \qquad 3.15$$

cioè in una maglia, la somma algebrica dei prodotti R*I dei rami e delle tensioni ai capi dei generatori ideali di corrente, è uguale alla somma algebrica delle f.e.m. dei generatori ideali di tensione. Scelto un arbitrario verso di percorrenza della maglia (v.p.), si considerano positivi i prodotti **R*I**, per i quali la **I** è concorde con il v.p, positive le f.e.m. per le quali il v.p. è uscente dal terminale contrassegnato con il + , negative le altre; si considerano inoltre positive le Ug la cui freccia rappresentativa è discorde con il v.p., negative le altre.

Facciamo riferimento al circuito di fig. 3.6. Per le prove numeriche siano:

*$R_1$=10 W; $R'_1$=15 W; $R_2$=20 W; $R_3$=50 W; $R_4$=25 W; $R_5$=100 W; $E_1$=150 V; $E_2$=100 V; $E_3$=50 V; $E_4$=50 V;$I_0$=2 A*

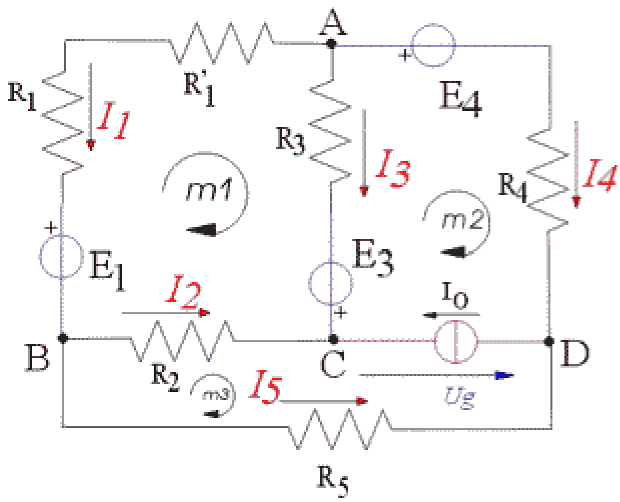



fig. 3.6

Si hanno le equazioni per i nodi A, B, D rispettivamente

$$-I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0$$

$$I_4 + I_5 = I_0$$

E per le maglie *m1, m2, m3*

$$-(R_1+R_1')*I_1 - R_2*I_2 + R_3*I_3 = E_1 + E_3$$

$$-R_3*I_3+R_4*I_4 +Ug = -E_3 - E_4$$

$$R_2*I_2 - Ug - R_5*I_5 = 0$$

Risolvendo il sistema, è possibile calcolare le intensità di corrente nei rami e la tensione ai capi del generatore ideale di corrente. Applicando i principi di Kirchhoff puri si ottiene un numero di equazioni pari al numero dei rami, ***l,*** che generalmente è troppo elevato. Nella pratica allora si preferisce ricorrere a due artifici matematici che riducono il numero di equazioni: il metodo delle ***correnti di maglia***, con il quale il numero di equazioni è pari al numero delle maglie, ***l-(n-1)***, e d il metodo **dei**

***potenziali di nodo*** dove il numero di equazioni è uguale ad ***n-1.*** . Prima di spiegarli, osserviamo che è in genere più stimolante ed istruttivo, quando possibile, ricorrere a metodi che si potrebbero definire passo-passo. Spesso, specie in elettronica, i circuiti vengono disegnati ( come del resto è già stato fatto negli esempi precedenti) indicando il potenziale di poli terminali di rami, i quali sembrano aperti. I poli suddetti possono però essere interpretati come i poli di generatori ideali di tensione con f.e.m. in valore assoluto uguale al potenziale del punto ed aventi a massa il polo positivo se il potenziale del punto è negativo (il negativo in caso contrario). Effettuata la sostituzione, la rete si può normalmente risolvere con il sistema ricavato dall'applicazione dei pdK.

E' però didatticamente molto utile procedere passo-passo, come nell'esercizio 3.5 ora proposto :

***Esercizio* 3. 5**

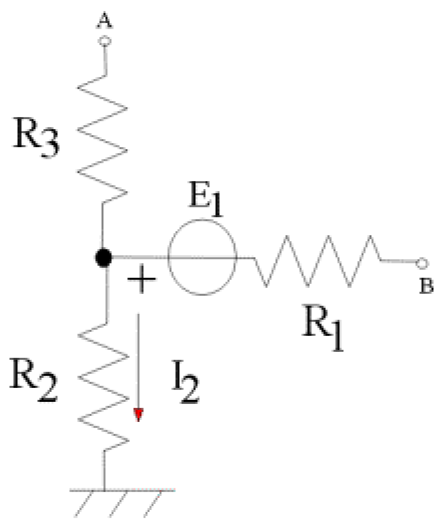



**fig. 3.7**

Con riferimento alla fig. 3.7

$R_1$=30 W ; $R_2$=20 W ; $R_3$=15 W ;

$E_1$=30 V;

$I_2$=3 A;

$V_B$= - 60 V.

*Calcolare* $V_A$.

Indicando con C il nodo di connessione dei tre rami si ha per definizione $V_A=U_{AC}+V_C$che è la risposta alla domanda, note $U_{AC}$ e $V_C$. La tensione $U_{AC}$ per la legge di Ohm è data da $U_{AC}=R_3*I_3$ avendo posto $I_3$ entrante dal nodo A. Per il I pdK nel nodo C, l'intensità $I_3$ si ricava da$I_3+I_1-I_2=0$, avendo indicato con $I_1$ la corrente in $R_1$ entrante in B.Applicando la legge di Ohm generalizzata, $I_1$ si ricava dalla$U_{CB}=V_C-V_B=E_1-R_1*I_1$. Per la legge di Ohm, per la definizione di d.d.p. e per la definizione di massa, $V_C$ si ricava dalla $U_{CM}=V_C=R_2*I_2$. Sostituendo i valori numerici e ripercorrendo a ritroso le formule scritte si ottiene il risultato ($V_A$=150V)

## Il metodo delle correnti di maglia

Ogni maglia è caratterizzata da un'unica corrente detta corrente di maglia, come fosse un circuito semplice. Le intensità effettive dei rami o coincidono con la corrente di maglia, quando il ramo è esclusivo di quella maglia, o sono la somma algebrica delle correnti di maglia che hanno quel ramo in comune. Si scrive quindi il secondo principio di Kirchhoff per le maglie indipendenti come di seguito indicato.

- L'equazione di una maglia comprendente un generatore di corrente è: *corrente di maglia =* **+** *corrente del generatore* ($m$=**+**$I_0$).
- Per le altre si può applicare la regola seguente, qui enunciata per grandezze continue, quindi per reti costituite da generatori e resistenze.*Nell'equazione di una maglia la corrente di maglia ha come coefficiente la somma di tutte le resistenze della maglia, mentre le correnti delle maglie aventi rami in comune, hanno come coefficiente la somma delle resistenze dei rami condivisi cambiate di segno se le correnti di maglia hanno verso opposto. Le correnti delle maglie che non hanno rami in comune non compaiono, il che significa che, matematicamente, il loro coefficiente è zero. Il secondo membro dell'equazione è costituito dalla somma algebrica delle f.e.m. dei generatori della maglia considerate positive se la corrente di maglia esce dal terminale positivo. NB: Bisogna avere l'avvertenza di non considerare il ramo con un generatore di corrente come ramo comune a due maglie*

Come esempio consideriamo la rete già esaminata di fig.3.6 Siamo *m1, m2, m3* le correnti di maglia Per la maglia *m2* (CADC) comprendente il generatore di corrente scriveremo: $\boldsymbol{m_2=I_0}$

Per la maglia $m_1$ (BACA) e per la maglia *m3* (BCADB) le equazioni sono rispettivamente

$$(R_1+R_2+R_3+R'_1)*m_1- R_3*m_2 - (R_2+R_3)*m_3=E_1+E_3$$

$$-(R_2+R_3)*m_1 + (R_3+R_4)*m_2 + (R_2+R_3+R_4+R_5)*m_3= - E_3 - E_4$$

Se $I_0$ è nota i termini contenenti $m_2$ possono essere inclusi nel secondo membro.

Si ottiene il sistema di due equazioni:

$$(R_1+R_2+R_3+R'1)*m_1 - (R_2+R_3)*m_3=E_1+E_3 +R_3*I_0$$

$$-(R_2+R_3)*m_1 + (R_2+R_3+R_4+R_5)*m_3= - E_3 - E_4 - R_3*I_0 -R_4*I_0$$

Le intensità di corrente nei rami si calcolano infine con le espressioni

$$I_1= - m_1$$

$$I_2= - m_1 + m_3$$

$$I_3= m_1 - m_3 - I_0$$

$$I_4= m_3 + I_0$$

$$I_5= - m_3$$

**Esercizio 3. 6** Sostituendo i valori inizialmente forniti

$$95m_1-70m_3=300$$

$$-70m_1+195m_3=-250$$

il sistema, risolto, fornisce per le correnti di maglia

$m_1=3{,}009$; $m_3=-0{,}202$

cui corrispondono le correnti reali nei rami: $I_1= - 3{,}009$ A;$I_2= - 3{,}211$ A;$I_3=1{,}211$ A; $I_4=1{,}798$ A; $I_5=0{,}202$ A

***Osservazione.***

E' possibile "eliminare" il generatore di corrente assegnando alla sua corrente un percorso qualsiasi, tale da formare una maglia, e facendo comparire nei rami interessati un generatore di f.e.m. pari al prodotto della somma delle resistenze del ramo per la corrente del generatore, avente il + nel punto di ingresso della corrente. Per l'esempio proposto si ottiene la rete di fig. 3.8, che per le due maglie rimaste, fornisce il precedente sistema di equazioni.

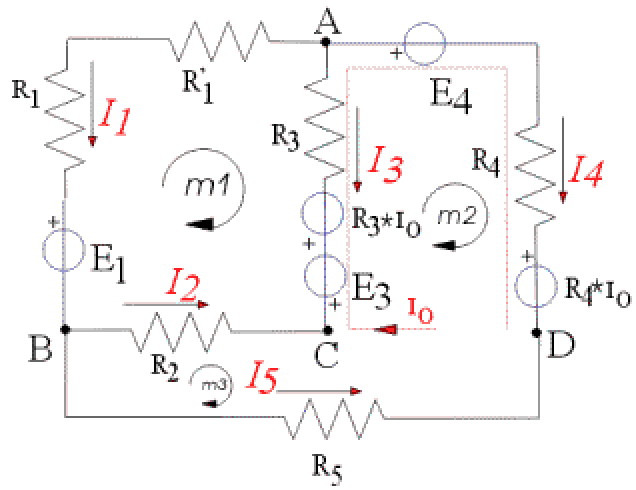



**fig. 3. 8**

## Metodo dei potenziali di nodo

Si assumono come incognite del sistema i potenziali dei nodi. In funzione di essi vanno espresse le intensità di corrente dei rami, quindi si scrive, per queste espressioni rappresentative delle correnti, il I pdK per gli n-1 nodi. All'n-esimo nodo, per il quale non va scritta l'equazione, si assegna un valore arbitrario del potenziale, comunemente zero. Procedendo in tal modo si arriva a riconoscere una struttura tipica, comune ad ogni equazione, riconducibile alla seguente regola: *il potenziale incognito del nodo per il quale si sta scrivendo l'equazione ha come coefficiente la somma delle conduttanze di tutti i rami che vi convergono, mentre i potenziali degli altri nodi hanno come coefficiente la somma delle conduttanze dei rami con cui sono collegati al nodo dell'equazione, cambiata di segno. Al secondo membro compaiono le correnti di tutti i generatori di corrente che convergono nel nodo, prese con il segno + se entranti, - se uscenti, e tutte le correnti di cortocircuito dei rami costituiti da generatori ideali di tensione e resistenze, prese con il segno + se il + dei generatori di tensioni è verso il nodo, - in caso contrario.* Se un ramo è costituito da un generatore ideale di corrente va ricordato che la sua conduttanza è nulla, mentre se è costituito da un generatore ideale di tensione ha una conduttanza infinita. In quest'ultimo caso se i rami costituiti dal generatore ideale hanno in comune un terminale, si pone a zero il potenziale di questo nodo ed i potenziali degli altri nodi si ricavano dalla definizione di generatore ideale di tensione. Se non hanno un terminale comune bisogna applicare il metodo nella sua formulazione originaria assumendo come incognite, oltre ai potenziali dei nodi, anche le correnti dei generatori ideali di tensione. Riferiamoci ancora alla rete d'esempio. Scegliamo, arbitrariamente $V_C=0$.

Le equazioni per i nodi A, B, D sono

$$\mathbf{(G_1+G_3+G_4)*V_A - G_1*V_B - G_4*V_D = G_1*E_1 - G_3*E_3 + G_4*E_4}$$
$$\mathbf{- G_1*V_A + (G_1+G_2+G_5)*V_B - G_5*V_D = - G_1*E_1}$$
$$\mathbf{- G_4*V_A - G_5*V_B + (G_4+G_5)*V_D = - I_0 - G_4*E_4}$$

dove

$G_1=1/(R_1+R'_1)$; $G_2=1/R_2$; $G_3=1/R_3$; $G_4=1/R_4$; $G_5=1/R_5$

**Esercizio 3. 7**

Numericamente si ha il sistema

$$0{,}1*V_A-0{,}04*V_B-0{,}04*V_D=7$$
$$-0{,}04*V_A+0{,}1*V_B-0{,}01*V_D= -6$$
$$-0{,}04*V_A-0{,}01*V_B+0{,}05*V_D= -4$$

che risolto fornisce

$V_A=10{,}6$ V; $V_B= - 64{,}2$ V; $V_D= - 84{,}4$ V

Ora è possibile calcolare le intensità di corrente nei rami ricorrendo utilizzando la legge di Ohm generalizzata

$$\mathbf{I_1= (V_A - V_B -E_1)* G_1}$$
$$\mathbf{I_2= V_B * G_2}$$
$$\mathbf{I_3= (V_A + E_3)* G_3}$$
$$\mathbf{I_4= (V_A - V_D - E_4)* G_4}$$
$$\mathbf{I_5= (V_B - V_D )* G_5}$$

Quindi sostituendo i valori

$I_1=-3{,}009$ A; $I_2=-3{,}211$ A; $I_3=1{,}211$ A; $I_4=1{,}798$ A; $I_5=0{,}202$ A.

**Teorema di Millmann**

Caso particolare del metodo dei potenziali di nodo, molto importante in quanto riferibile ad uno schema che spesso si riscontra nella pratica, è il teorema di Millmann che si applica alle reti binodali e che, con una formula, consente di trovare subito la tensione tra i due nodi.

***$U_{AB}$=( S $_a$G*E+S $_a$I$_0$ )/S G*** 3. 16

La d.d.p tra A e B, i due nodi delle rete, è data dal rapporto tra la somma algebrica delle correnti di cortocircuito dei rami (E*G) e delle correnti dei generatori di corrente, prese con il segno + se dirette verso A, e la somma aritmetica della conduttanza dei rami. Vediamone un'applicazione numerica.

**Esercizio 3. 8**

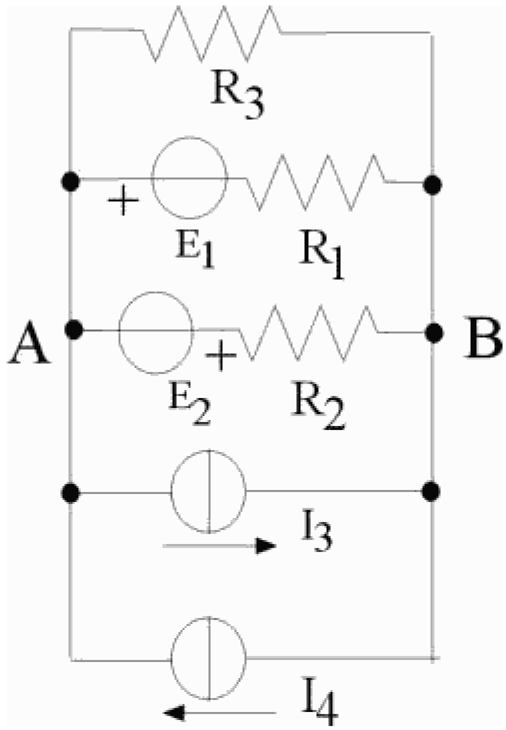



**Fig. 3.9**

Nella fig. 3.9

$R_1$=10 W ; $R_2$=10 W ; $R_3$=10 W ;

$E_1$=12 V; $E_2$=6V

$I_3$=1 A; $I_4$= 2A

Calcolare $U_{AB}$

**S$_a$G*E**=($E_1$/$R_1$-$E_2$/$R_2$)=1,2-0,6=0,6A

**S$_a$I$_0$**=$I_4$-$I_3$ =2-1= 1 A

**S*G***=(1/$R_1$+1/$R_2$+1/$R_3$)=(0,1+0,1+0,1)=0.3S

$\boldsymbol{U_{AB}}$=( $S_aG$*E+$S_aI_0$ )/SG=(0,6+1)/0,3=5,33V

## Conclusioni

I due principi di Kirchhoff forniscono le equazioni per risolvere una qualsiasi rete composta con i bipoli fondamentali. Ne abbiamo esaminato l'uso nel caso di grandezze continue: è questa una limitazione esclusivamente di tipo matematico. Per comprendere meglio quanto fondamentali e generali siano i procedimenti di calcolo esposti, accenniamo al metodo adottato per lo studio di grandezze comunque variabili nel tempo, che sarà sviluppato, in particolare, per le grandezze alternate sinusoidali (art. 5 e 6). La funzione che esprime la dipendenza dal tempo dei generatori è trasformata in una funzione di una variabile generalmente indicata con ***s.*** Ai bipoli accumulatori sono associate le espressioni: **sL** per gli induttori, **1/sC** per i condensatori, mentre i resistori mantengono immutata la resistenza **R**. Si parla in tal caso di impedenze operatoriali ed esse svolgono matematicamente, nelle reti in cui sono inserite, il ruolo visto per le resistenze nell'applicazione in continua dei principi di Kirchhoff. Le correnti dei rami che si ricavano dalla soluzione dei sistemi algebrici, conseguenti all'applicazione dei due principi, sono a loro volta funzioni della variabile s e, dall' espressione in funzione di s, è possibile ricavare le informazioni sul loro andamento nel tempo. Quanto detto non ha la pretesa di affermare che si tratta di una semplice formalità. La matematica necessaria è certamente molto ardua, ma la sostanza di un procedimento acquisito in quello che è un caso particolare, rimane immutata.