



Giovanni Schgör (g.schgor)

Analisi statistiche

19 February 2006

Articolo n° 13 su 13 del corso "[Elaborazione numerica dei segnali](#)". Vai all'[indice](#) del corso.

Paragrafi dell'articolo:

1. [Correlazione](#)
2. [Spettri di potenza](#)
3. [Segnali e disturbi](#)

Correlazione

(27)

Date due serie di dati, \mathbf{x}_n e \mathbf{y}_n , si può analizzare la loro reciproca dipendenza (o, al contrario, la loro indipendenza) con metodi derivati dall'analisi statistica. Quale esempio si considerino i dati di peso corporeo e di altezza relativi a ciascuno degli N individui di una popolazione.

Ipotizzando una relazione lineare fra i dati delle due serie, si possono così calcolare i parametri che definiscono una retta rappresentante idealmente l'andamento di una delle variabili rispetto all'altra.

Questo procedimento è noto come **analisi di regressione lineare**.

Ovviamente, anche quando questa relazione esiste, i dati possono non essere allineati su una retta (per effetto di una certa casuale distribuzione dei valori), quindi si tratta di stabilire un criterio che minimizzi gli scostamenti dei dati reali dalla retta ideale.

Il criterio maggiormente seguito è quello del **minimo scostamento quadratico medio**, cioè di rendere minima la somma degli scostamenti fra ogni punto (definito dai valori di \mathbf{x} e \mathbf{y} corrispondenti allo stesso indice \mathbf{n}) e la retta stessa.

Risulta intuitivo che esiste una reciprocità di dipendenza a secondo che si consideri come variabile indipendente la \mathbf{x} oppure la \mathbf{y} : nel primo caso è

$y = a \cdot x + b$, con a e b i parametri cercati, dove a è la pendenza della retta e b l'intercetta per $x=0$.

La Fig.27.1a mostra i passaggi algebrici che consentono di ricavare tali parametri. Per minimizzare la sommatoria dei quadrati delle differenze, si sviluppa questa espressione e si uguagliano a zero le derivate parziali rispetto ad a ed a b .

Un esempio numerico, con $N = 100$ dati, permette di verificare il metodo.

La serie di dati y_n , è ricavata con parametri noti a priori, ma vengono introdotti disturbi (d_n) fino al 25%, come si può vedere dal grafico.

Malgrado ciò, i valori stimati (a_s e b_s) non si discostano significativamente da quelli utilizzati per stabilire i valori di y .

La Fig.27.1b mostra invece gli stessi calcoli utilizzando le funzioni statistiche, in particolare la media aritmetica (m).

Per quanto già accennato, in generale vi sarà una differenza se come variabile indipendente si considera la x o la y , cioè se si cerca la regressione di y rispetto a x o viceversa di x rispetto a y (in altre parole i coefficienti ayx e byx , oppure axy e bxy).

Quindi si potranno avere due rette $y = ayx \cdot x + byx$ e $x = axy \cdot y + bxy$ distinte.

Il legame fra x e y sarà tanto più probabile quanto più coincidenti saranno queste due rette, e il parametro che esprime questa dipendenza è

detto **coefficiente di correlazione** (r), ed è dato dalla radice quadrata del prodotto delle due pendenze.

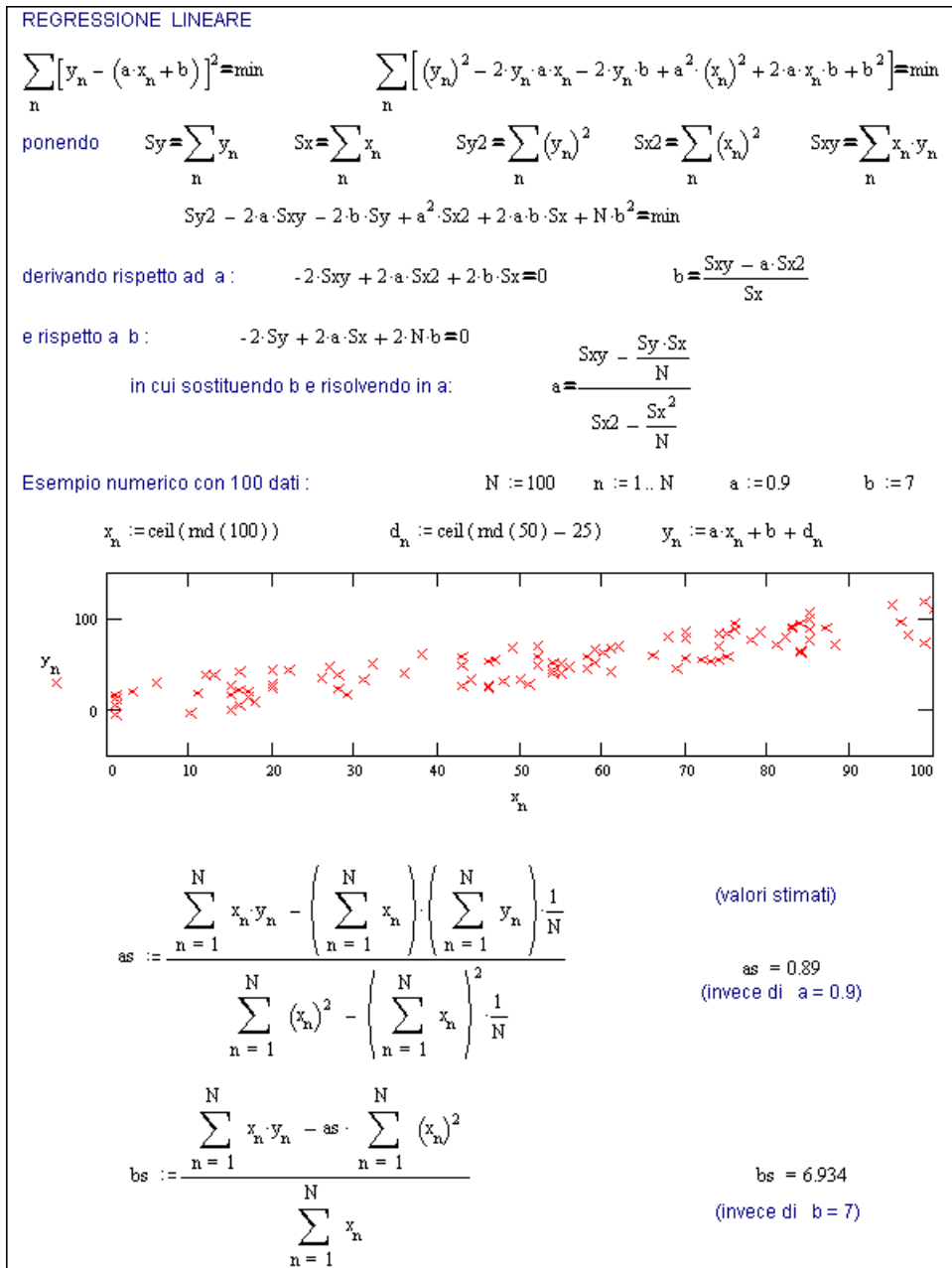


Fig.27.1a - Metodo di regressione lineare fra due serie di dati.

Calcolo regressione lineare e coefficiente di correlazione mediante i valori delle medie

$$\mu_x := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N x_n \quad \mu_x = 51.11 \quad \mu_y := \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N y_n \quad \mu_y = 52.439$$

Regressione di y su x: Regressione di x su y:

$$a_{yx} := \frac{\sum_{n=1}^N (x_n - \mu_x) \cdot (y_n - \mu_y)}{\sum_{n=1}^N (x_n - \mu_x)^2} \quad a_{xy} := \frac{\sum_{n=1}^N (x_n - \mu_x) \cdot (y_n - \mu_y)}{\sum_{n=1}^N (y_n - \mu_y)^2}$$

$$b_{yx} := \mu_y - a_{yx} \cdot \mu_x \quad b_{xy} := \mu_x - a_{xy} \cdot \mu_y$$

$$a_{yx} = 0.89 \quad b_{yx} = 6.934 \quad a_{xy} = 0.866 \quad b_{xy} = 5.697$$

Coefficiente di correlazione: $\rho := \sqrt{a_{yx} \cdot a_{xy}} \quad \rho = 0.878$

deviazione standard (con n=0...N-1):

$$x_{n-1} := x_n \quad y_{n-1} := y_n \quad n := 0..99$$

$$\frac{\text{cvar}(x, y)}{\text{var}(x)} = 0.887 \quad \frac{\text{cvar}(x, y)}{\text{var}(y)} = 0.867 \quad \rho := \frac{\text{cvar}(x, y)}{\text{stdev}(x) \cdot \text{stdev}(y)} \quad \rho = 0.877$$

$$\text{mean}(x) = 51.297 \quad \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n = 51.11$$

$$\text{var}(x) = 795.833 \quad \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - \text{mean}(x))^2 = 800.293$$

$$\text{cvar}(x, y) = 706.294 \quad \frac{1}{N} \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} [(x_n - \text{mean}(x)) \cdot (y_n - \text{mean}(y))] \right] = 712.512$$

$$\text{stdev}(x) = 28.211 \quad \sqrt{\text{var}(x)} = 28.211$$

$$\text{slope}(x, y) = 0.887 \quad (= a_{yx})$$

$$\text{intercept}(x, y) = 6.959 \quad (= b_{yx})$$

$$\text{corr}(x, y) = 0.877 \quad (= \rho)$$

In Mathcad è anche possibile usare direttamente le funzioni:

Fig.27.1b - Calcolo di regressione e correlazione con funzioni statistiche Mathcad.

Poichè nel caso di massima corrispondenza le due pendenze dovrebbero risultare inverse (una relativa all'asse x e l'altra relativa all'asse y), il massimo di r è uguale ad 1

Nel caso di indipendenza delle due serie di dati, le relative rette di regressione risulterebbero perpendicolari fra loro, quindi r tenderebbe a zero.

Il calcolo con Mathcad è facilitato dall'uso di speciali funzioni statistiche, che corrispondono a importanti concetti e che quindi meritano di essere approfonditi.

Oltre alla ben nota media aritmetica ($\mathbf{mx} = \mathbf{mean(x)}$, in Mathcad) è importante il concetto di **varianza** ($\mathbf{var(x)}$), che esprime la distribuzione dei dati attorno alla media ed è definita appunto dalla sommatoria dei quadrati delle differenze di ciascun dato rispetto alla media.

La radice quadrata della varianza esprime la ben nota **deviazione standard** ($\mathbf{stdev(x)}$), valore che ha un particolare significato se la distribuzione dei dati è di tipo 'gaussiano' (cioè con un andamento a forma di campana attorno al valor medio), come normalmente assunto in fenomeni casuali.

Quando si hanno due serie di dati, come considerato nelle Fig.27.1a e b, è anche importante il concetto di **covarianza** ($\mathbf{cvar(x,y)}$), che esprime la sommatoria dei prodotti delle singole differenze dei dati rispetto alle relative medie (vedi Fig.27.1b, che riporta le singole funzioni ed il loro sviluppo secondo le definizioni).

Va infine segnalato che se il problema è limitato alla ricerca delle rette di regressione e alla valutazione della correlazione, il Mathcad dispone delle funzioni dirette, quindi è possibile utilizzare semplicemente **slope(x,y)**, **intercept(x,y)** e **corr(x,y)** per ricavare i rispettivi valori.

Se la relazione che lega le due serie non fosse di tipo lineare, il Mathcad potrebbe ancora essere utilizzato per valutare regressioni quadratiche (paraboliche) o cubiche, e persino funzioni generali predefinite.

Quello che però interessa più strettamente l'elaborazione dei segnali è il caso in cui le coppie di valori $\mathbf{x_n}$ e $\mathbf{y_n}$ sono valori rilevati al tempo $\mathbf{t_n}$ (cioè con $\mathbf{t_n = n \cdot Dt}$), caso in cui la correlazione assume significati particolari.

La Fig.27.2 mostra la generazione di due segnali impulsivi di periodo $\mathbf{k1 \cdot Dt}$, con un ritardo di $\mathbf{k2 \cdot Dt}$ del secondo (\mathbf{y}) rispetto al primo (\mathbf{x}).

Se ora si fa la sommatoria dei prodotti dei due segnali per ciascun intervallo di campionamento ed estesa ad un periodo $M \cdot Dt$, si nota un massimo in corrispondenza di $k2$. Ciò significa che mediante la correlazione è possibile rilevare il ritardo fra due forme d'onda simili.

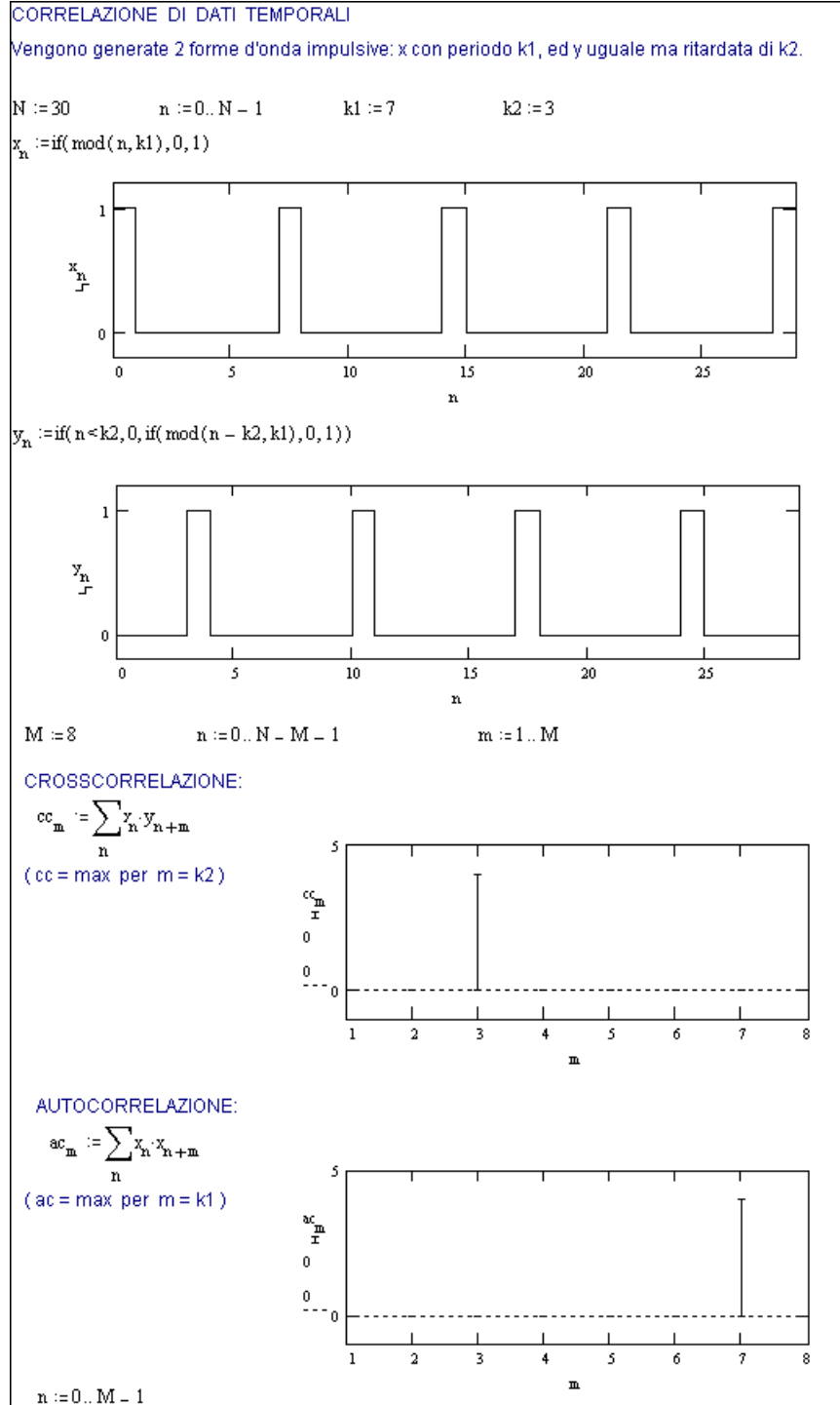


Fig.27.2a - Principio della correlazione fra serie di dati temporali

Ovviamente il calcolo delle sommatorie deve essere esteso ad un periodo che comprenda il ritardo, ed il fatto che si considerino i prodotti dei valori di entrambi i segnali (prodotti 'incrociati') dà il nome di **crosscorrelazione** a tale calcolo.

Si può osservare anche che se al posto del secondo segnale si utilizzano i valori dello stesso, si ottiene un' **autocorrelazione**. Il risultato è che si ottiene il massimo in corrispondenza del periodo del segnale stesso, cioè **k1**.

Queste semplici osservazioni sono la base di importantissime applicazioni nell'elaborazione dei segnali: basti pensare agli ecoscandagli, dove segnali sonori permettono la misura dei fondali marini, ma anche ai radar, dove gli echi di segnali elettromagnetici permettono la localizzazione di ostacoli, fino ai più recenti misuratori di velocità basti sui laser, ed ai localizzatori satellitari (GPS).

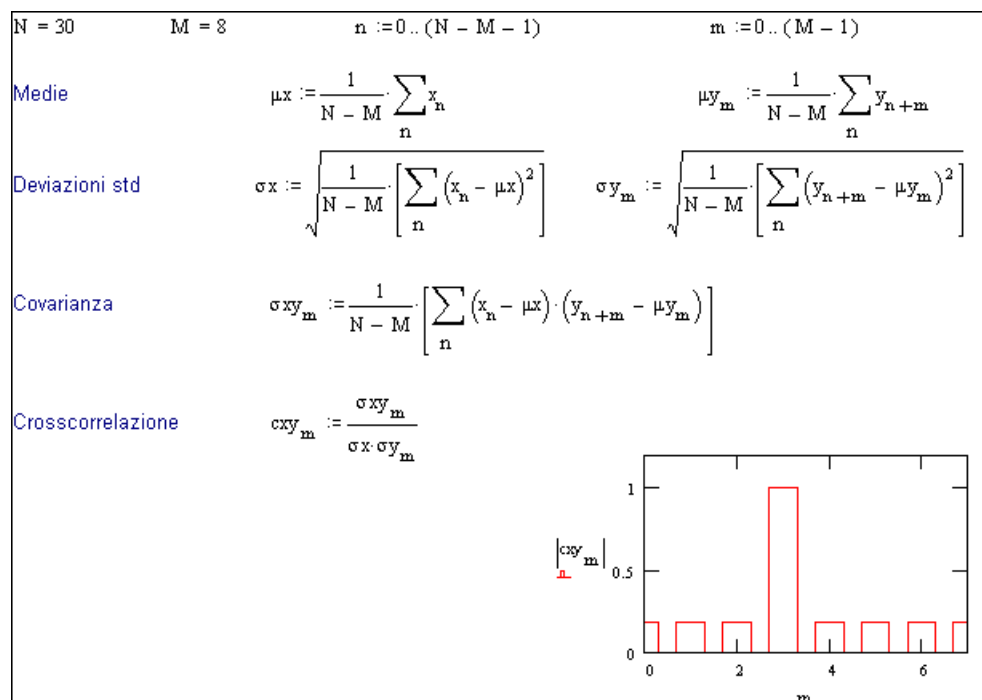


Fig.27.2b - Procedura alternativa di calcolo della crosscorrelazione.

La Fig.27.2b riporta lo sviluppo dei calcoli necessari per trovare l'andamento della crosscorrelazione, utilizzando le definizioni illustrate nella Fig.27.1b.

Si deve però osservare che il numero n di dati considerato è $N-M$ e che la procedura è ripetuta per M volte, con l'indice $m=0..M-1$.

Quindi i primi $N-M$ dati di x vengono moltiplicati per lo stesso numero di dati di y , iniziando però la serie dall' m -esimo dato.

Nel caso esaminato, data l'uguaglianza di y rispetto ad x (salvo il ritardo) risulta che la crosscorrelazione è massima ($c_{xy} = 1$) in corrispondenza di $m = 3$, cioè del ritardo k_2 , come indicato dal grafico.

Se al posto di y si mettesse x , si avrebbe un'autocorrelazione e quindi risulterebbe $c_{xx} = 1$ in corrispondenza di $m = 7$, cioè del periodo k_1 , come del resto già visto in linea di principio nella Fig.27.1b.

Osservando in Fig.27.2b il calcolo della covarianza si nota che la sua struttura è simile a quella della convoluzione, quindi è spontaneo pensare che questo procedimento (lunghe sommatorie di prodotti) possa essere semplificato passando nel dominio delle frequenze, cioè utilizzando le trasformate di Fourier.

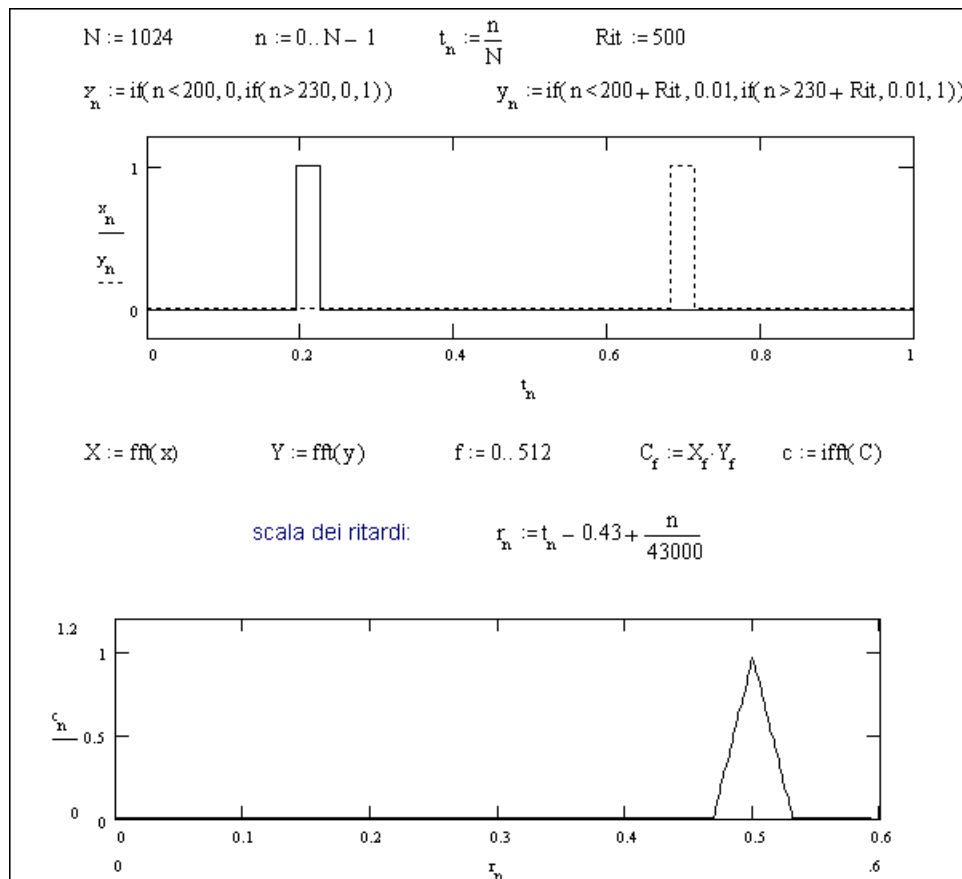


Fig.27.3 - Applicazione delle trasformate di Fourier al calcolo di correlazione.

La Fig.27.3 mostra questo metodo, in cui vengono moltiplicati fra loro solo i singoli coefficienti delle varie frequenze (X_f e Y_f) per poi antitrasformare il risultato.

La correlazione c è poi rappresentata in un grafico in funzione del ritardo rilevato fra le due serie: la scala di questo (r_n) è funzione lineare del tempo, ed in questo caso è stata ricavata empiricamente.

Per approfondire questo metodo, che ha importanti applicazioni pratiche, è però opportuno introdurre i concetti di **potenza di un segnale** e degli **spettri di potenza**.

Spettri di potenza (28)

Un segnale fisico comporta sempre un'energia che è definita come l'integrale nel tempo della sua potenza istantanea per tutta la durata del segnale stesso.

Mentre è abbastanza chiaro questo concetto applicato ad un segnale elettrico, non altrettanto potrebbe esserlo per altri tipi di segnali quali quelli acustici oppure quelli ottici ed elettromagnetici in generale.

Per affrontare il problema è quindi opportuno iniziare l'esame di un segnale elettrico sinusoidale, per poi estenderne le conclusioni a qualsiasi tipo.

Considerando un segnale di tensione alternata sinusoidale $v_t = V \cdot \text{sen}(wt)$ applicato ad una resistenza R , si avrà in ogni istante t una corrente $i_t = (V/R) \cdot \text{sen}(wt)$, quindi la potenza in ogni istante sarà $p_t = v_t \cdot i_t = (V^2/R) \cdot \text{sen}^2(wt)$, che mediante identità trigonometriche [1] può essere trasformata in

$$p_t = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{2}$$

il che significa che la potenza istantanea è data da un valore costante (prodotto della 'tensione efficace' $V/\sqrt{2}$ per la 'corrente efficace' $I/\sqrt{2} = V/(R \cdot \sqrt{2})$), attorno al quale vi è un valore variabile con

andamento cosinusoidale di uguale ampiezza ma di pulsazione doppia rispetto a quella del segnale.

Poiché in ogni periodo la media di questa potenza fluttuante è zero, si può concludere che il valor medio della potenza del segnale è uguale al solo prodotto dei valori efficaci, prodotto che viene definito **potenza attiva**.

Se ora si considera lo stesso segnale applicato non più ad una semplice resistenza ma ad un circuito composto da una resistenza **R** e da un condensatore **C** in serie, il calcolo della corrente istantanea si complica essendo questa il risultato di un'equazione differenziale.

Dovremmo infatti esprimere la tensione ai capi del condensatore come

$$v_{c_t} = v_t - R \cdot i_t$$

$$i_t = \frac{d(v_{c_t})}{dt}$$

Pur essendo possibile la soluzione, ad esempio con il metodo di Laplace (vedi capitolo 7), si ritiene più intuitivo ricorrere alle differenze finite (come già visto al capitolo 16) per ottenere l'andamento di **i_t** in funzione di **v_t**.

La Fig.28_1 mostra il caso di un circuito con resistenza **R = 25 Ohm** e condensatore **C = 800 mFarad** in serie, alimentati da una tensione sinusoidale con modulo **V = 100 Volt** e frequenza **f = 2 Hz** (quindi pulsazione **w = 2pf = 4p**).

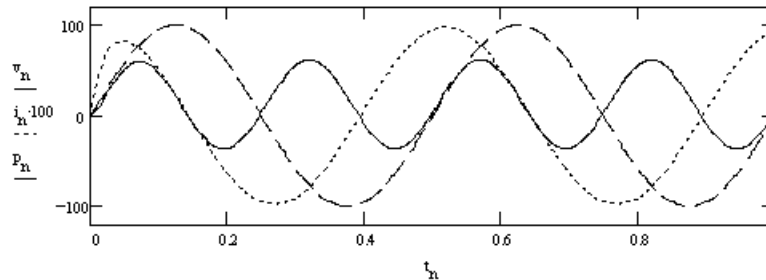
POTENZA SEGNALI SINUSOIDALI $N := 1024$ $n := 0..N-1$ $\Delta t := \frac{1}{N}$ $t_n := n \cdot \Delta t$

Parametri del circuito $R := 25$ $C := 800 \cdot 10^{-6}$

Tensione applicata $f := 2$ $v_n := 100 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_n)$

Tensione ai capi di C $vc_0 := 0$ $n := 0..N-2$ $vc_{n+1} := vc_n + \frac{\Delta t}{R \cdot C} (v_n - vc_n)$

Corrente e potenza istant. $n := 0..N-1$ $i_n := \frac{v_n - vc_n}{R}$ $P_n := v_n \cdot i_n$



Potenza attiva media $P := \frac{1}{N} \left(\sum_n P_n \right)$ $P = 11.198$ (Watt)

Metodo vettoriale:

Tensione applicata $V := -100j$ $\alpha := \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(V)}{\text{Re}(V) + 10^{-12}} \right)$ $\alpha \cdot \frac{180}{\pi} = -90$

Impedenza circuito $Z := R - j \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$

Corrente $I := \frac{V}{Z}$ $I = 0.946 - 0.238j$ $\beta := \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(I)}{\text{Re}(I)} \right)$ $\beta \cdot \frac{180}{\pi} = -14.108$

Potenza attiva $\phi := \alpha - \beta$ $P := \frac{|V| \cdot |I|}{2} \cos(\phi)$ $P = 11.883$

Metodo diretto: $\int_0^1 |V| \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \cdot |I| \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi) dt = 11.883$

Fig.28_1 - Potenza in un segnale sinusoidale.

Applicando le differenze finite si ottengono gli andamenti della tensione v e della corrente i istantanee, come indicato dal grafico.

Il loro prodotto p rappresenta la potenza istantanea ed ha un andamento sinusoidale però di frequenza doppia rispetto a v ed i , con una componente continua che rappresenta la potenza attiva.

Se infatti si fa la media di p in 1 secondo (corrispondente a $N \cdot \Delta t$ e multiplo del periodo) si ottiene il valore di questa potenza.

In elettrotecnica è però più usato il metodo vettoriale, con V ed I vettori nel piano complesso. In questo caso sono noti la tensione applicata V e l'impedenza Z (pure complessa), da cui si può ricavare I .

Indicando con **a** e **b** rispettivamente gli angoli del vettore tensione e del vettore corrente rispetto all'asse reale, può essere ricavata la loro differenza, tradizionalmente indicata come **j**.

La potenza attiva è allora espressa come prodotto dei valori efficaci [2] della tensione e della corrente, moltiplicato per **cos(j)**.

Lo stesso valore può essere ottenuto per integrazione diretta del prodotto dei segnali nel tempo.

Si noti che il valore ricavato con i vettori differisce, anche se di poco, da quello ricavato come media diretta delle differenze finite: ciò è dovuto al transitorio causato dalla costante di tempo (se ne vede chiaramente l'effetto sull'andamento iniziale del grafico della corrente e della potenza), oltre che alle approssimazioni delle differenze finite.

Questa premessa ha lo scopo di introdurre al calcolo della potenza dei segnali periodici di qualsiasi forma che, come già ampiamente citato, possono essere espressi mediante serie di Fourier, quindi come somma di segnali sinusoidali.

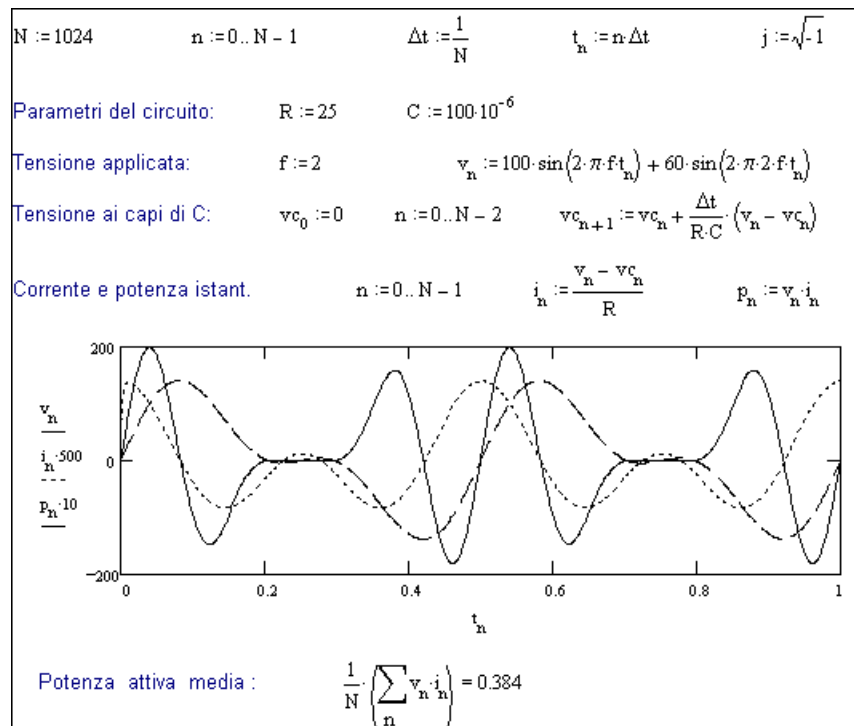


Fig.28_2a - Potenza in segnali con armoniche.

Il problema è dunque quello di valutare l'andamento della potenza quando coesistono nel segnale più frequenze.

La Fig.28_2a mostra il caso simile al precedente ma con l'aggiunta di una seconda armonica nel segnale di tensione, con ampiezza del 60% rispetto alla fondamentale.

La costante di tempo è stata inoltre ridotta (a 2.5 ms) per diminuire la sua influenza nel calcolo della potenza.

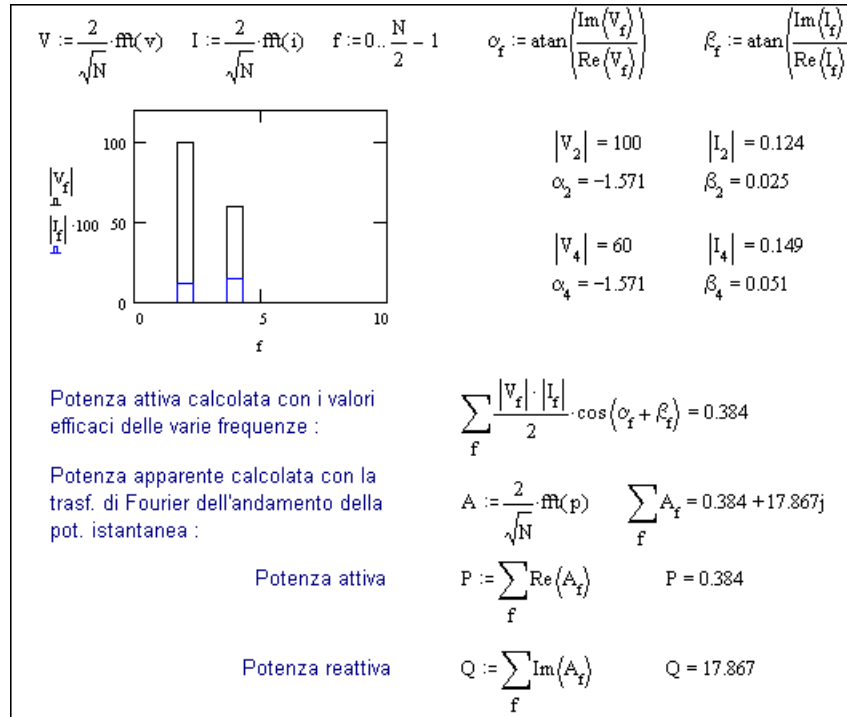


Fig.28_2b - Calcolo della potenza con le trasformate di Fourier.

La Fig.28_2b mostra l'applicazione delle trasformate di Fourier sui segnali di tensione e di corrente, con cui vengono ricavati il modulo e la fase di ogni vettore alle varie frequenze, per poi procedere al calcolo vettoriale della potenza.

Si noti che l'analisi è fatta su $f=N/2$, cioè 512 frequenze, ma in realtà nei segnali considerati sono presenti solo la fondamentale (2 Hz) e la sua seconda armonica (4 Hz), come si può constatare dal diagramma.

Il principio della sovrapposizione degli effetti, ricavare cioè la potenza come somma delle potenze calcolate per ogni singola frequenza, sembra contraddire la proprietà della convoluzione delle frequenze in

corrispondenza dei prodotti dei segnali nel tempo (vedi alla fine del capitolo 6).

In realtà ciò è dovuto al fatto che l'integrale, esteso ad un periodo, del prodotto di una frequenza con frequenze sue multiple è uguale a zero, quindi la convoluzione si riduce in pratica alla somma dei prodotti dei termini di ugual frequenza.

Questo vale però solo per la parte 'continua' della potenza, mentre per la parte 'fluttuante' occorre tener conto di tutti i prodotti parziali derivanti dalla convoluzione delle frequenze di tensione per quelle di corrente.

La Fig.28.3a mostra i calcoli relativi allo stesso circuito di Fig.28.2, applicando però il metodo vettoriale. Ovviamente gli andamenti coincidono, mentre i singoli valori mostrano piccole differenze dovute al transitorio (i valori esenti dal transitorio, quindi più corretti, sono quelli di quest'ultima figura).

Dall'andamento della parte reale (attiva) della potenza, si è ricavato lo spettro che mostra la componenti continua e le armoniche a 2, 4, 6 e 8 Hz.

Nella Fig.28.3b queste componenti sono calcolate come prodotti parziali di ciascuna tensione (1° indice) per ciascuna corrente (2° indice).

Nell'esempio considerato le 2 componenti di tensione (a 2 e 4 Hz), moltiplicate per le componenti di corrente danno luogo a 4 prodotti parziali che, opportunamente raggruppati, costituiscono i coefficienti delle varie armoniche della potenza.

Per capire questo sviluppo si deve ricorrere a identità trigonometriche (come già visto all'inizio del capitolo) per cui il prodotto di due sinusoidi di uguale argomento dà una componente continua ed una di frequenza doppia.

$$\text{Quindi} \quad \mathbf{\text{sen}^2(\omega t) = [1 - \cos(2\omega t)]/2} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{\text{sen}^2(2\omega t) = [1 - \cos(4\omega t)]/2}$$

mentre

$$\mathbf{\text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}(2\omega t) = [\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)]/2.}$$

Ciò spiega [\[3\]](#) l'origine di tutte le armoniche della potenza.

La Fig.28.3b riporta inoltre le espressioni relative alla potenza attiva utilizzabili per ricavare l'andamento istantaneo di questa, nelle varie possibili forme: trigonometriche, vettoriali o in serie di Fourier.

Va tuttavia sottolineato che essendo nulla la media della potenza fluttuante, il valore della potenza attiva è determinato soltanto dalla componente continua, quindi funzione unicamente dei prodotti di frequenze uguali.

In pratica lo spettro è quindi ricavato utilizzando solo queste ultime (ma ciò non permette più la ricostruzione dei valori istantanei della potenza).

Un'ulteriore osservazione è che se mancano le componenti reattive (cioè le correnti risultano 'in fase' con le tensioni, quindi il carico è puramente resistivo) i prodotti tensioni-correnti possono essere sostituiti da quadrati.

Infatti in tal caso $\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}^2/\mathbf{R} = \mathbf{I}^2 \cdot \mathbf{R}$.

Prodotti parziali delle potenze attive:			
$P_{22} := \frac{ V_2 \cdot I_2 }{2} \cdot \cos(\alpha_2 - \beta_2)$	$P_{22} = 0.786$	$P_{24} := \frac{ V_2 \cdot I_4 }{2} \cdot \cos(\alpha_2 - \beta_4)$	$P_{24} = 1.866$
$P_{42} := \frac{ V_4 \cdot I_2 }{2} \cdot \cos(\alpha_4 - \beta_2)$	$P_{42} = 0.472$	$P_{44} := \frac{ V_4 \cdot I_4 }{2} \cdot \cos(\alpha_4 - \beta_4)$	$P_{44} = 1.119$
Componente continua :	$\frac{PF_0}{2} = 1.906$	$P_{22} + P_{44} = 1.906$	
Potenza 'fluttuante'			
Componente a 2 Hz :	$Re(PF_1) = 2.337$	$P_{24} + P_{42} = 2.337$	
Componente a 4 Hz :	$Re(PF_2) = -0.786$	$-P_{22} = -0.786$	
Componente a 6 Hz :	$Re(PF_3) = -2.337$	$-(P_{24} + P_{42}) = -2.337$	
Componente a 8 Hz :	$Re(PF_4) = -1.119$	$-P_{44} = -1.119$	
$t := 0..511$ $fx := 4$	Espressioni equivalenti della potenza		
in coseni	$pc_t := \sum_{f=0}^{fx} \sum_{g=0}^{fx} V_f \cdot \cos\left(\omega_f \cdot \frac{t}{N} + \alpha_f\right) \cdot I_g \cdot \cos\left(\omega_g \cdot \frac{t}{N} + \beta_g\right)$		
in termini vettoriali	$pv_t := \sum_{f=0}^{fx} \sum_{g=0}^{fx} V_f \cdot Re\left[e^{j\left(\omega_f \cdot \frac{t}{N} + \alpha_f\right)}\right] \cdot I_g \cdot Re\left[e^{j\left(\omega_g \cdot \frac{t}{N} + \beta_g\right)}\right]$		
in termini di Fourier	$pf_t := \frac{PF_0}{2} + \sum_{k=1}^{fx} Re(PF_k) \cdot \cos\left(k \cdot \omega_2 \cdot \frac{t}{N}\right) + \sum_{k=1}^{fx} Im(PF_k) \cdot \sin\left(k \cdot \omega_2 \cdot \frac{t}{N}\right)$		

Fig.28.3b - Calcolo coefficienti dello spettro di potenza.

[1]) Si ricorre alla combinazione delle seguenti identità :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \text{e} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

per cui $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$

[2]) Si definisce valore efficace di un segnale sinusoidale il valore in corrente continua che dà luogo alla stessa dissipazione termica, ed è uguale al modulo diviso $\sqrt{2}$.

[3]) Si considera qui il caso semplificato di correnti in fase con le rispettive tensioni.

Segnali e disturbi(29)

Un segnale trasmesso a distanza è soggetto a disturbi che tendono a falsare il contenuto informativo del segnale stesso.

Senza indagare sulle cause di disturbo (che possono essere interne alle apparecchiature che generano, trasmettono e ricevono il segnale, oppure esterne, dovute ad interferenze elettromagnetiche sul mezzo di supporto della trasmissione), si può dire che questo si presenta come una variazione casuale del valore istantaneo.

Finchè tale variazione è piccola rispetto all'entità dei valori istantanei del segnale, l'effetto può essere trascurato, ma in caso contrario si può giungere ad una deformazione che rende irriconoscibile (e quindi inutilizzabile) il segnale ricevuto.

Un importante problema delle telecomunicazioni è quindi quello di elaborare in ricezione il segnale disturbato in modo da estrarre da questo il segnale originario, e la tecnica numerica è particolarmente adatta a tale scopo.

Esaminando la distribuzione¹⁾ del disturbo, possono essere considerati due tipi: il primo è il cosiddetto **rumore bianco**, che presenta una distribuzione uniforme del disturbo casuale, cioè ogni valore compreso entro limiti definiti (massimo positivo e minimo negativo) ha la stessa probabilità di verificarsi di qualsiasi altro nella gamma.

Più realistico è però il **rumore gaussiano**, che presenta una distribuzione a campana attorno al valore zero (più probabili valori piccoli rispetto a quelli grandi).

Nello studio sugli effetti dei disturbi verranno quindi utilizzati algoritmi di generazione del 'rumore' di entrambi i tipi.

La Fig. 29.1 esemplifica il caso di un segnale (sinusoide a 1 kHz, di ampiezza unitaria) disturbato da un 'rumore bianco' in percentuale variabile (%rum = 20, nell'esempio), che viene generato con la funzione 'random' (rnd(1), cioè variabile casuale fra 0 e 1), opportunamente centrata (-0.5) e divisa per 100.

Avendo scelto come numero di campionamenti $N = 4096$ e come frequenza di campionamento $f_c = 10$ kHz, risulta un periodo di osservazione $P = 409,6$ ms.

Nella prima parte della figura (a), viene riportato il campionamento del segnale nei primi 10 ms (dove sono visibili 10 sinusoidi, campionate ciascuna in 10 punti e dove si nota la diversità delle sinusoidi dovuta al disturbo).

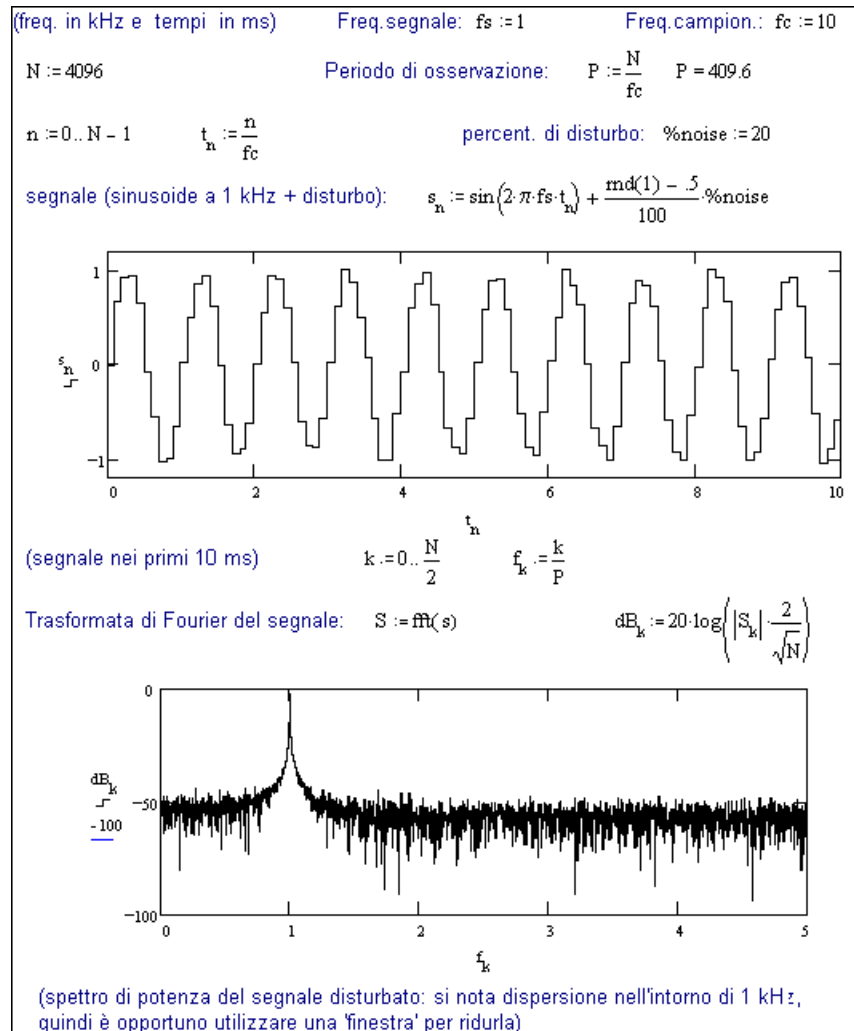


Fig. 29.1a - Generazione ed analisi di un segnale ad 1 kHz con disturbo del 20%.

Il segnale viene poi trasformato in spettro ($S = \text{fft}(s)$) e ciascun modulo delle k frequenze ottenute viene rappresentato in scala logaritmica.

Si noti a questo proposito che utilizzando il coefficiente 20 come moltiplicatore del logaritmo, si esegue il quadrato del segnale [2\)](#) quindi, per quanto visto nel capitolo precedente, si ha lo spettro della potenza.

L'osservazione riportata al fondo della fig.29.1a, consiglia l'utilizzo di una 'finestra' che faccia meglio risaltare i limiti delle frequenze che rappresentano il segnale, per isolarle da tutte le altre che rappresentano il 'disturbo'.

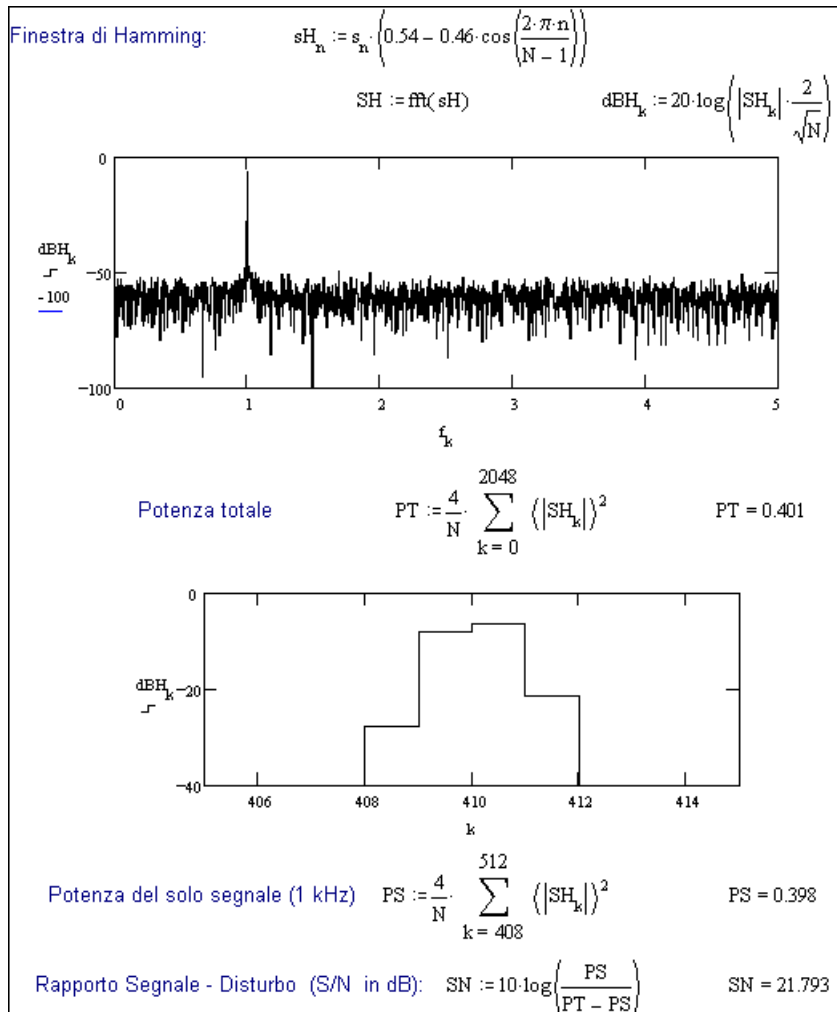


Fig. 29.1b -

Elaborazione del segnale precedente, per ricavarne il rapporto segnale/disturbo.

Una finestra di Hamming (v. capitolo 11) applicata al segnale, risolve il problema della dispersione spettrale, come si può osservare nella fig.29.1b qui sopra.

Quindi la potenza totale (PT) è data dalla sommatoria delle frequenze di tutto lo spettro, mentre la potenza del segnale è ricavabile dalla sommatoria delle frequenze che 'spiccano' decisamente dal valore medio.

Il grafico sotto lo spettro rappresenta lo stesso ingrandito nella zona di k (da 405 a 415) ove è presente il segnale.

Si nota che la potenza è superiore a -40 dB per k tra 408 e 412, al che corrispondono frequenze ($f_k = k / P$) fra 996.09 e 1005.86 Hz [3](#)

La potenza corrispondente al segnale è dunque la sommatoria del quadrato dei moduli entro questi limiti.

Un'ulteriore precisazione sul coefficiente moltiplicatore $4/N$, che è dovuto semplicemente al modo come il MathCad dà il risultato della fft : in realtà ciò non sarebbe necessario perchè poi per il calcolo del rapporto segnale / disturbo si deve appunto fare un rapporto, quindi questo coefficiente si elimina [4](#)).

Il rapporto segnale / disturbo viene semplicemente ricavato dal rapporto fra la potenza del segnale (PS) e la differenza fra la potenza totale e quella del segnale (PT-PS, che è quindi la potenza attribuibile al rumore), rapporto poi espresso in dB.

Si osserva che la potenza totale del segnale disturbato potrebbe essere ricavata direttamente dalla sommatoria dei quadrati di s , divisa per il numero di campionamenti [5](#)), ma che l'analisi nel tempo non permetterebbe la distinzione fra segnale e disturbo, come fatto con lo spettro delle frequenze.

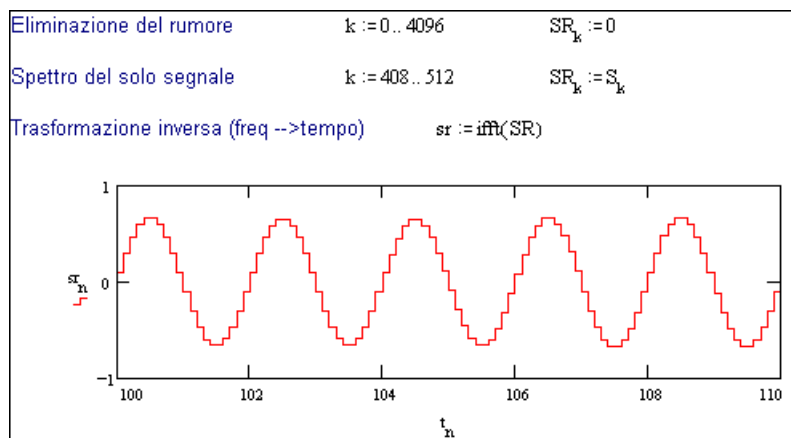


Fig. 29.1c - Ricostruzione del segnale con eliminazione del rumore

Ma l'analisi in frequenza consente di raggiungere un risultato pratico ancora più significativo: se riusciamo a separare il segnale dal rumore, possiamo eliminare quest'ultimo e ricostruire quindi il segnale senza il disturbo. La Fig. 29.1c mostra questa procedura sullo stesso segnale utilizzato per il calcolo del rapporto segnale/disturbo.

Le tecniche numeriche consentono però ancora di più: se il segnale trasmesso fosse sottocampionato, la sua ricostruzione in ricezione darebbe una serie di gradini che renderebbe evidente l'approssimazione. In questi casi si può ricorrere ad algoritmi di

interpolazione, che permettono di migliorare notevolmente il segnale in ricezione.

Essenzialmente il principio utilizzato è l'allargamento dello spettro (che corrisponde ad un più fitto campionamento) con la semplice aggiunta di zeri nel tratto dalla massima frequenza originale alla nuova massima.

Per tener conto di questo allargamento, occorre però moltiplicare ogni modulo originale per un coefficiente correttore.

La Fig.29.2 indica un esempio di applicazione del metodo, in cui una frequenza ($f=215$ Hz) è campionata ogni millisecondo (cioè meno di 5 campionamenti nel periodo).

Con un allargamento dello spettro di k_i volte ($k_i=4$ nell'esempio), si ottiene un campionamento altrettante volte più fitto, quindi una ricostruzione più accurata.

L'ultimo grafico della figura mostra appunto il confronto fra la ricostruzione con lo spettro originale (x) e quella con lo spettro allargato (y).

Naturalmente è possibile anche l'operazione inversa, utile per restringere la banda in trasmissione: quest'ultima è chiamata **decimazione**, in quanto toglie (cioè azzerà) una parte dello spettro originale.

Come verrà illustrato nelle appendici, queste operazioni sono facilitate dalla disponibilità di apposite funzioni software che eseguono in modo formalmente semplice tutte le procedure necessarie.

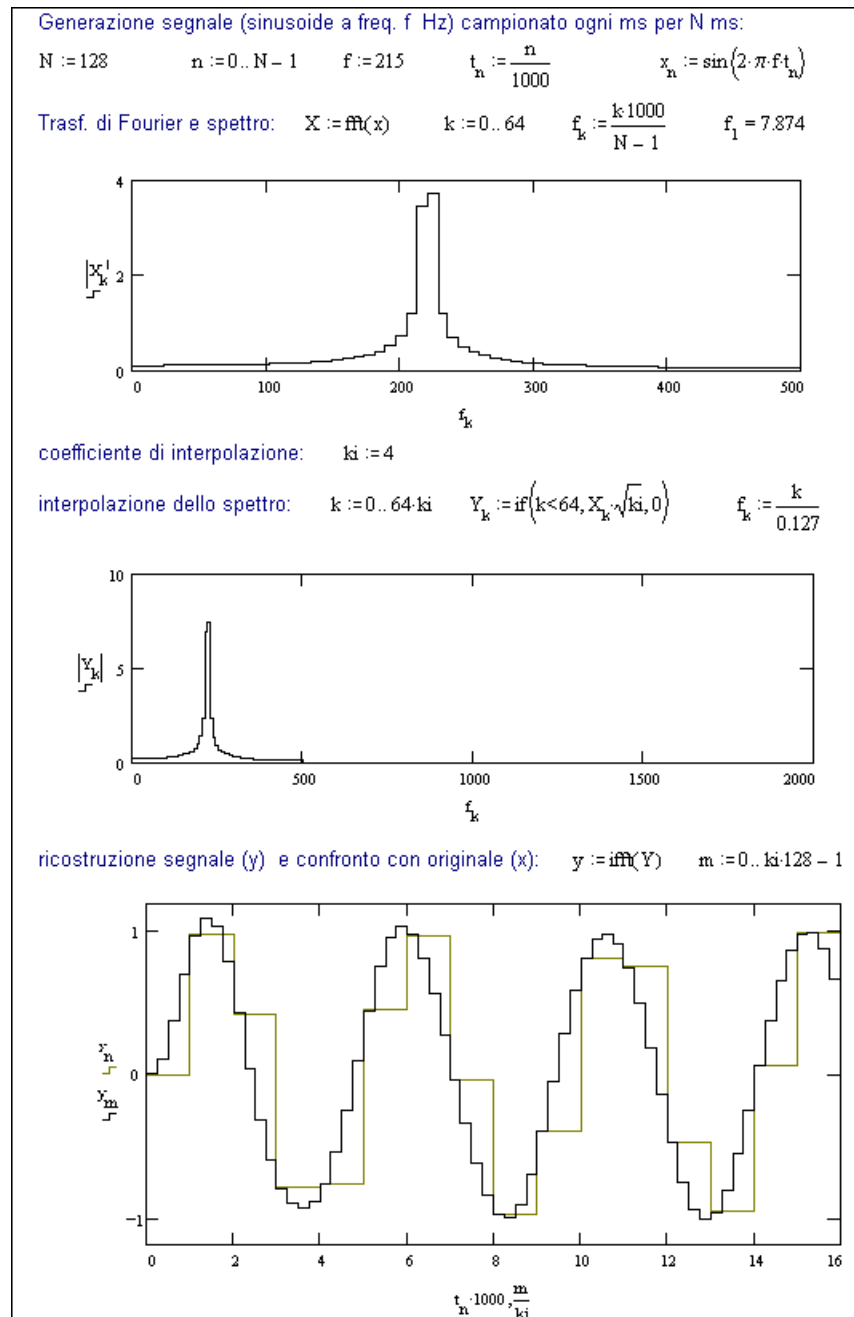


Fig. 29.2 - Esempio di interpolazione nella ricostruzione di un segnale sottocampionato.

1) In statistica si definisce **distribuzione** l'andamento della probabilità che si verifichi un dato evento : ad es. lanciando un dado si ha la stessa probabilità (distribuzione uniforme) per tutti i numeri interi compresi fra 1 e 6, ma se il numero di dadi lanciati aumenta, la probabilità per i vari risultati è diversa. Più sono i dadi, più la

distribuzione si avvicina ad una forma a campana (tipica della distribuzione gaussiana)

2) Il decibel (dB) è definito come $10 \cdot \log(P_u / P_i)$, con P_u potenza in uscita e P_i potenza in ingresso. In questo caso si suppone P_i unitario e $P_u = (\text{segnale})^2$, quindi si ha: $10 \cdot \log(|S|^2) = 20 \cdot \log(|S|)$.

3) La frequenza fondamentale dello spettro è $1/P$, in questo caso essendo $P=0.4096$ sec si ha come fondamentale 2.44141.. Hz, e tutte le altre sono multiple (k) di questa.

4) Il coefficiente permette tuttavia di valutare per altra via lo scadimento del segnale: teoricamente una frequenza di ampiezza unitaria ha una potenza di 0.5 (se il periodo di osservazione contenesse esattamente un numero intero di sinusoidi), mentre la potenza utile rilevata sul segnale disturbato risulta 0.398.

5) Si osserva anche che la potenza del solo disturbo non è, come si potrebbe credere, legata semplicemente alla percentuale di rumore rispetto all'ampiezza del segnale: la distribuzione casuale uniforme fa risultare questa potenza decisamente più piccola. Infatti nel caso esaminato del 20% di rumore, tale potenza è