

Bruno Valente (BrunoValente)

EGIZI, PIRAMIDI, GEOMETRIA E MISTERI.

29 May 2010

Quest'articolo è tratto da un mio **intervento nel forum** nel tentativo di rispondere alla questione posta da [RenzoDF](#):

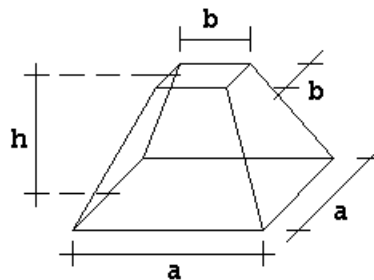
*come fecero gli **egizi**, non conoscendo la matematica necessaria, a ricavare la **formula** per calcolare il **volume** del **tronco di piramide** a base quadrata?*

Sembrerebbe impossibile senza far uso di conoscenze ad un certo livello e si sa che invece la **matematica** degli egizi si fermava alle **frazioni** o poco più.

Gli esperti pare siano in difficoltà nel dare una risposta...

Premetto di non saper nulla degli egizi e quindi quelle che seguono sono solo mie riflessioni dettate dal mio buon senso e non è detto che corrisponda a quello degli altri, anzi molto spesso non vi corrisponde affatto.

$$V_t = \frac{1}{3}h(ab + b^2 + a^2)$$



Tronco di piramide3.GIF

Ipotizzo che quella gente non fosse molto cosciente della matematica, cioè che la concepisse solo strettamente legata alla geometria e che non fosse in grado di chissà quali livelli di astrazione come invece sappiamo fare noi.

Ipotizzo quindi che i loro ragionamenti fossero strettamente finalizzati a risolvere problemi molto pratici inerenti l'agricoltura e la costruzione di edifici e che non avessero alcuna dimestichezza con equazioni, polinomi, prodotti notevoli ecc.

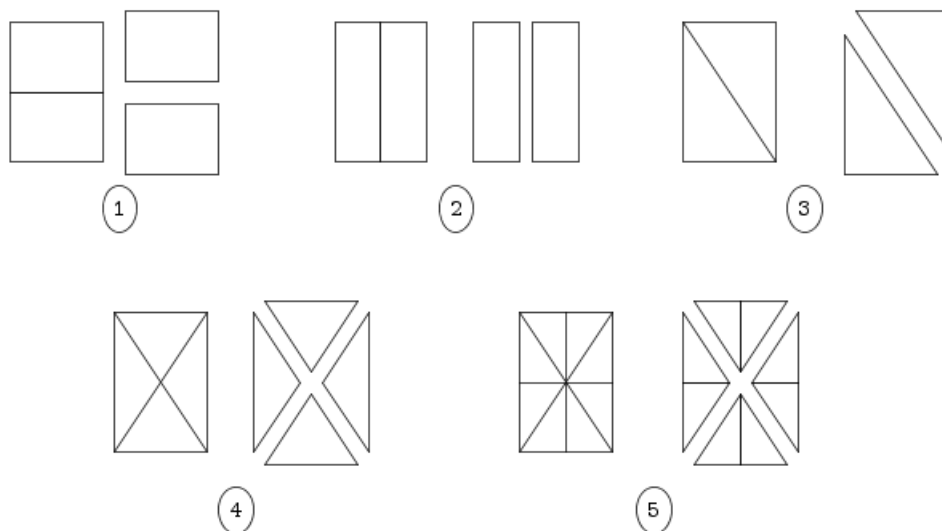
All'inizio fu sicuramente la necessità di riuscire a stimare la resa produttiva di una certa superficie di terreno che li fece accostare alla geometria, la necessità insomma di prevedere quanto raccolto avrebbe potuto produrre un certo appezzamento di terreno conoscendo le sue dimensioni.

Dopo aver imparato a misurare le lunghezze per confronto con una unità di misura venne elaborato il concetto di area sicuramente per conseguenza di questo tipo di esigenze.

Nei terreni a forma rettangolare dove ad esempio venivano piantati alberi disposti regolarmente ad una certa distanza tra loro apparve presto evidente che per sapere quanti fossero gli alberi, invece di contarli uno ad uno, era sufficiente e più conveniente eseguire il prodotto tra il numero di alberi disposti sui due lati ortogonali.

Subito dopo immagino sia stato elaborato il concetto di proporzionalità: per esempio il numero di alberi su di un terreno di dimensioni doppie non varia se si raddoppia anche la distanza tra gli alberi ecc.

Poi immagino apparve anche evidente che un terreno rettangolare si poteva facilmente dividere in due pezzi di uguale superficie (che producevano entrambi la stessa quantità di raccolto) come nelle figure 1-2-3 e che questi concetti vennero presto estesi dai terreni a tutti gli oggetti che avessero quelle forme.



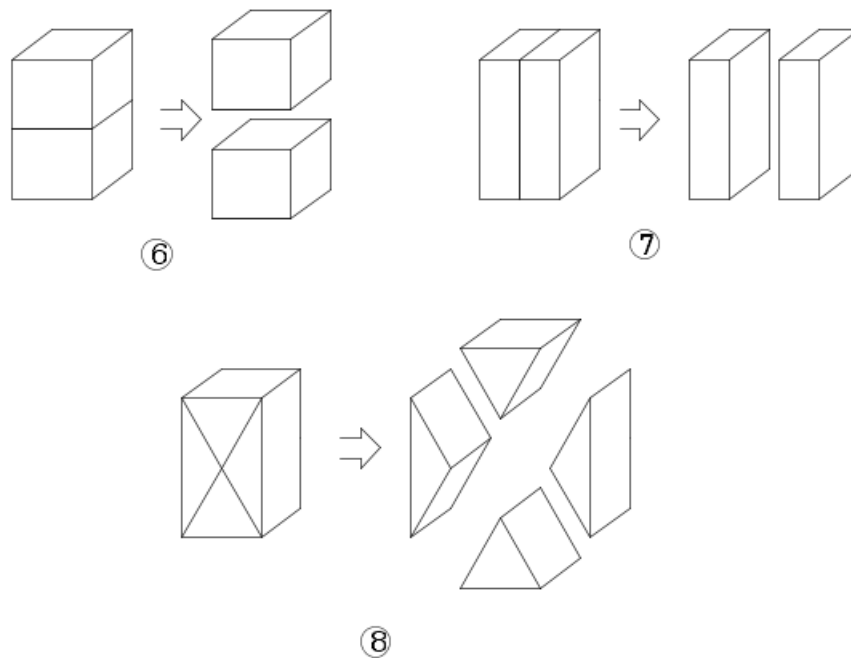
La comprensione di questi concetti doveva essere abbastanza immediata perchè le parti ottenute dalla divisione avevano tutte la stessa forma e questo fatto poteva essere verificato direttamente guardando, al massimo misurando i lati dei poligoni ottenuti, oppure se si trattava di figure disegnate su carta, ritagliando le parti e verificando che fossero uguali sovrapponendole.

La fig. 4 mette in evidenza un enorme salto di qualità che gli egizi ad un certo punto devono aver fatto: le figure che si ottengono da un rettangolo diviso secondo le diagonali hanno la stessa superficie ovviamente. Ma è davvero così ovvio? direi di no: la forma dei triangoli è diversa e confrontarli non aiuta affatto.

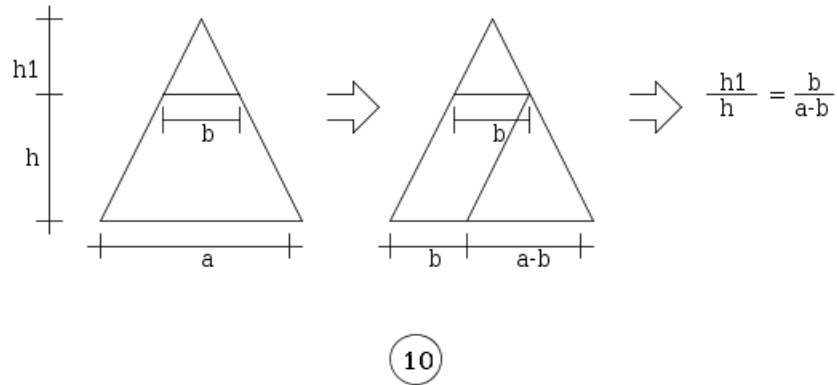
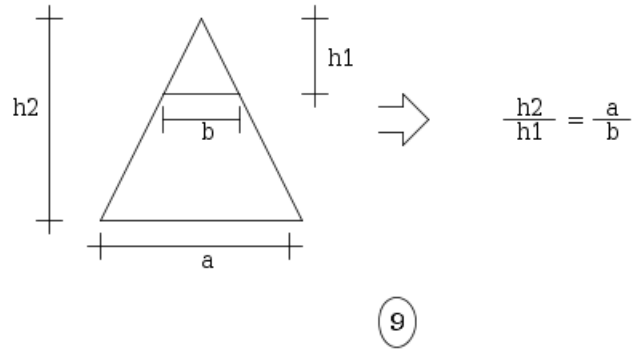
Ritengo che qui sia stato necessario uno sforzo di astrazione non indifferente per capire che, pur apparendo diversi, hanno la stessa superficie: a qualcuno di loro dotato grande fantasia sarà venuto in mente di dividere ulteriormente i triangoli come in fig.5 per accorgersi che i triangoli più piccoli che si ottengono sono tutti uguali...al massimo alcuni sono rovesciati.

Credo poi abbia dovuto faticare non poco per convincere gli altri che quello strano modo di ragionare fosse sensato ("facciamo finta che i triangoli siano ulteriormente divisi in questo modo..." e l'altro rispondeva "ma non è vero, il mio terreno non è ulteriormente diviso...a cosa può servire fare finta di dividerlo se poi non si fa veramente?" ecc. ecc.)

A questo punto l'estensione di questi concetti ai solidi deve essere stata immediata e dopo aver imparato a calcolare il volume dei parallelepipedi devono anche aver imparato a dividerli in parti uguali, fig.6 e 7 ed in particolare, fig.8,dove i quattro solidi che si ottengono, pur apparendo di forma diversa, hanno lo stesso volume.



Devono aver senz'altro imparato a riconoscere la similitudine tra triangoli e in particolare i concetti evidenziati nelle fig. 9 e 10.



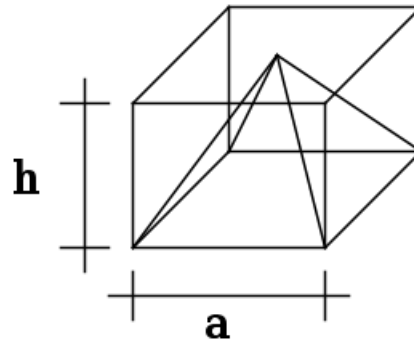
La matematica necessaria ai concetti esposti, trattandosi sempre e solo di questioni inerenti la proporzionalità, si riduce praticamente alle sole frazioni.

Ora faccio vedere come, con la sola conoscenza dei semplici concetti che ho esposto sopra, si possa arrivare alla dimostrazione della formula che mette in relazione il volume del parallelepipedo che contiene una piramide a base quadrata con il volume della piramide e il volume del parallelepipedo che contiene un tronco di piramide a base quadrata con il volume del tronco di piramide.

Se fossi un egiziano partirei senz'altro da prove empiriche giocando con modellini di piramidi di varia forma realizzati con sottili lamine di legno o simili. Proverei a riempirli di sabbia e a pesarli nella speranza di trovare degli indizi di regole.

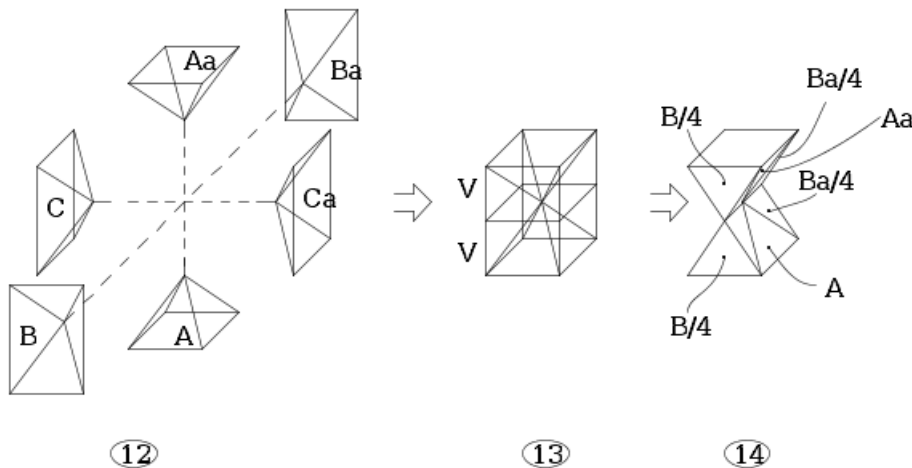
Mi troverei nella condizione di saper calcolare facilmente il volume di solidi come i parallelepipedi ma di non saperlo fare per le piramidi...le facce inclinate mi mettono in difficoltà.

Comincerei subito a cercare una relazione tra il volume, che so calcolare, del parallelepipedo che contiene la piramide e quello della piramide contenuta nel parallelepipedo, che non so calcolare, sperando che arrivi qualche nuova idea.



11

Probabilmente, così giocando, potrei imbattermi casualmente in tre coppie di piramidi dalla particolare forma come quella in fig.12 che, se opportunamente affiancate, formano un parallelepipedo come in fig. 13 e accorgermi poi che, nonostante la forma diversa, hanno tutte lo stesso volume. Successivamente cercherei di trovare una giustificazione rigorosa con il ragionamento aiutandomi con la geometria che conosco.



12

13

14

Procederei così: so che il volume del parallelepipedo $2V$ è dato dal prodotto dell'area di base per l'altezza, so anche che l'area di base coincide con quella della coppia di piramidi che ho chiamato A e Aa e che l'altezza corrisponde con il doppio dell'altezza h di una delle due piramidi, so che il volume del parallelepipedo coincide con la somma dei volumi V dei due parallelepipedi identici che contengono le due piramidi A e Aa e anche con la somma dei volumi delle sei piramidi.

So anche che tagliando il parallelepipedo con due piani passanti per le diagonali di una faccia e ortogonali alla stessa faccia ottengo quattro solidi di uguale volume, due dei quali sono rappresentati in figura 14.

Osservando la fig.14 scopro che il volume complessivo è pari alla somma di due volte quello della piramide A o Aa e di quello della piramide B o Ba e quindi posso scrivere

$$V = 2V_A + V_B = V_A + V_B + V_C$$

da cui

$$2V_A + V_B - V_A - V_B = V_C$$

$$V_A = V_C$$

e in modo analogo si arriva a

$$V_A = V_B = V_C$$

e quindi

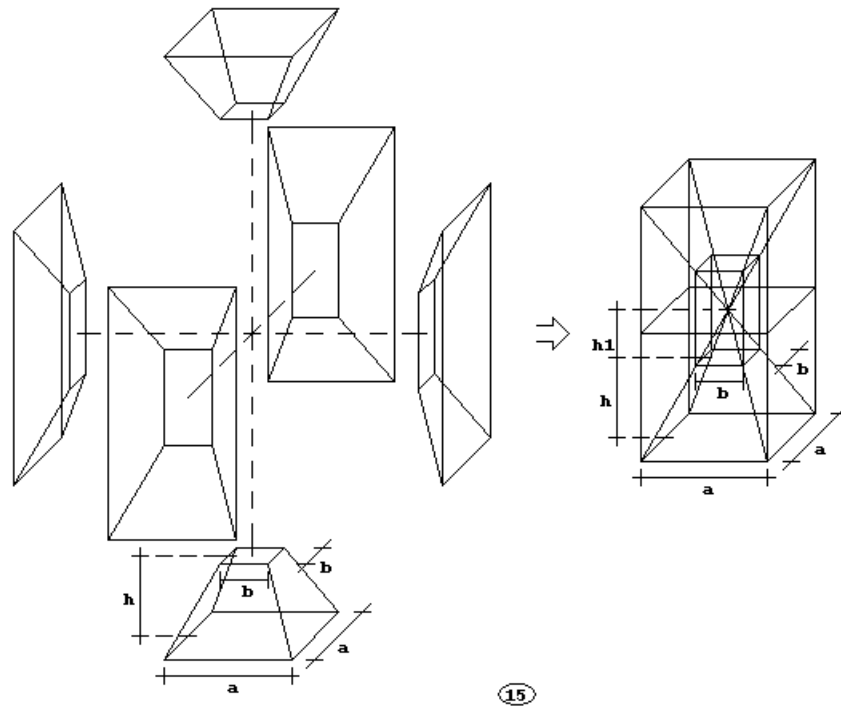
$$V_A = \frac{V}{3} = \frac{a^2 h}{3}$$

che la formula per calcolare il volume della piramide.

In pratica ho capito che la formula per calcolare il volume della piramide è una naturale conseguenza del fatto che un parallelepipedo a base quadrata contiene sempre sei piramidi di ugual volume aventi il vertice al centro del parallelepipedo e le basi coincidenti con le sei facce del parallelepipedo stesso.

Mi chiedo poi se un ragionamento basato su questa scoperta possa tornarmi utile per trovare l'altra relazione: quella tra il volume del tronco di piramide e il parallelepipedo che lo contiene con la stessa base e la stessa altezza.

Sulla falsa riga del precedente esperimento costruisco tre coppie di tronchi di piramide che, opportunamente affiancati formano un parallelepipedo come in fig.15 e osservo che all'interno del parallelepipedo, nella zona centrale, si forma un parallelepipedo vuoto con i lati proporzionalmente più piccoli di quello grande.



15

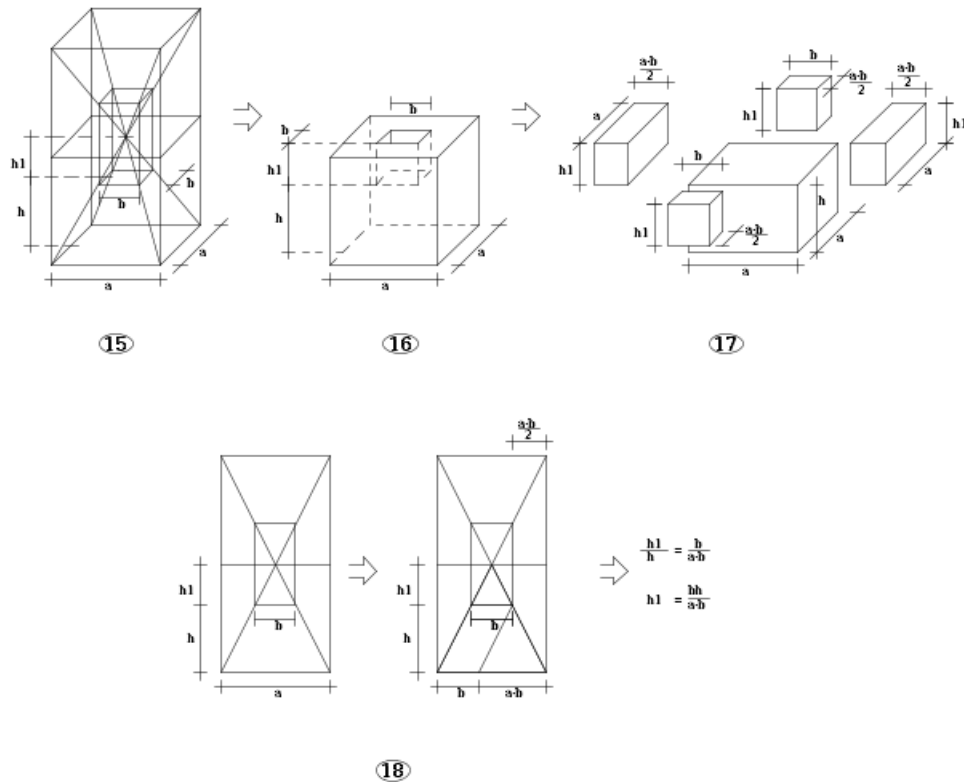
Tronco di piramide1.GIF

Posso pensare il parallelepipedo interno come formato da sei ipotetiche piramidi che sarebbero le parti mancanti delle piramidi originali da cui sono stati ricavati i sei tronchi.

Il ragionamento mi porta come conseguenza a capire che i sei tronchi hanno tutti lo stesso volume come accadeva per le piramidi e che la somma dei sei volumi corrisponde alla differenza tra il volume complessivo del parallelepipedo grande e quello vuoto che appare al suo interno.

Prendo in considerazione il solido di fig.16 che ottengo tagliando a metà il parallelepipedo grande con un piano parallelo alle basi e passante per il centro: mi appare come un parallelepipedo con un altro parallelepipedo vuoto al suo interno.

Il volume che mi interessa posso scomporlo in cinque parallelepipedi come in fig.17.



Ora so che il volume del tronco di piramide equivale ad un terzo della somma dei volumi dei cinque parallelepipedi.

Eseguo il calcolo cercando di liberarmi di h_1 e allo scopo metto in campo le mie conoscenze sui triangoli simili (fig.18)

$$V_t = \frac{1}{3} \left(\frac{bh}{a-b} a(a-b) + \frac{bh}{a-b} b(a-b) + a^2 h \right)$$

cioè

$$V_t = \frac{1}{3} h (ab + b^2 + a^2)$$

Non posso sapere con certezza se gli egiziani abbiano effettivamente seguito questo percorso per arrivare a quella formula ma indubbiamente ho mostrato come sia possibile arrivarci con un livello di conoscenza della matematica non molto diverso da quello che può possedere un ragazzino dei nostri tempi in prima o seconda

media, quindi senza chissà quali misteri o magiche virtù... senza scomodare gli extraterrestri.

Vanno invece riconosciute a quel popolo la creatività e la genialità che come al solito fanno la differenza.

Estratto da "<http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Webmaster:brunovalente5>"